Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2017/2018

Analysis 1
Übungsblatt 3

Abgabe und Besprechung am 30.10.17 um 17:00 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 9 (4 Punkte)
Es sei $n \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, dass jede injektive Abbildung $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijektiv ist.

Hinweis: Nutzen Sie Induktion nach n: Es sei $f : \{1, \dots, n+1\} \to \{1, \dots, n+1\}$ injektiv sowie $k := f(n+1)$ und

$$g(j) := \begin{cases} n+1, & j = k \\ k, & j = n+1 \\ j, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachten Sie $h|_{\{1,\dots,n\}}$ für $h := g \circ f$.

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Zwei Metriken d_1 und d_2 auf einer Menge X heißen *äquivalent*, wenn gilt:

$$\forall x \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists r_1, r_2 > 0 : \mathbb{B}_1(x, r_1) \subseteq \mathbb{B}_2(x, \varepsilon) \wedge \mathbb{B}_2(x, r_2) \subseteq \mathbb{B}_1(x, \varepsilon).$$

Dabei sei $\mathbb{B}_j(x, r_j) := \{y \in X \mid d_j(x, y) < r_j\}$, $j = 1, 2$. Es seien nun (X, d) ein metrischer Raum und

$$\delta(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Man zeige, dass auch δ eine Metrik auf X ist und dass d und δ äquivalent sind.

Hinweis: Die Funktion $t \mapsto t/(1+t)$ ist monoton wachsend.

Aufgabe 11 (4 Punkte)
Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist der Betrag eines Vektors $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Beweisen Sie, dass die sogenannte *euklidische Metrik* $d_E : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |x - y|$ tatsächlich eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 12 (4 Punkte)
Es sei A eine nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit $a := \sup(A)$. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

(i) Existiert $\max(A)$ nicht, dann gilt: $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists x \in A : x > a - \frac{1}{n}$.

(ii) Es gibt eine Folge $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.