Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau Wintersemester 2017/2018

Analysis 1
Übungsblatt 4

Abgabe und Besprechung am 06.11.17 um 17:00 Uhr im Curie-Hörsaal.

Definition: Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Dann ist $d_Y := d|_{Y\times Y}$ eine Metrik auf Y, die so genannte *induzierte Metrik*. Man sagt d induziert d_Y auf Y.

Aufgabe 13 (4 Punkte)
Es sei $X := (0, 1)$. Beweisen Sie:

(i) $d(x, y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ für $x, y \in X$ ist eine Metrik auf X.

(ii) Die natürliche Metrik und d sind äquivalent.

(iii) Es gibt keine zur natürlichen Metrik äquivalente Metrik auf $\mathbb{R}$, die d auf X induziert.

Aufgabe 14 (4 Punkte)
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) (x_n) konvergiert gegen $a \in X$,

(ii) Jede Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) besitzt wiederum eine Teilfolge $(x_{n_{k_l}})$, die gegen $a \in X$ konvergiert.

Aufgabe 15 (4 Punkte)
Sei $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$. Man zeige:

(i) Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \neq 0$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.

Aufgabe 16 (4 Punkte)
Die reellen Folgen (a_n), (b_n) und (c_n) seien wie folgt definiert:

$$a_n := \frac{(3-n)^3}{3n^3 - 1}, \quad b_n := \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}, \quad c_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Man entscheide für jede dieser Folgen, welcher der Begriffe „beschränkt“, „konvergent“ bzw.„divergent“ zutrifft (bezüglich der natürlichen Metrik auf $\mathbb{R}$). Im Falle der Konvergenz bestimme man den Grenzwert.

Hinweis: Erweitern Sie geschickt – z. B. mit $\frac{1}{n^3}$ bei (a_n) – und verwenden Sie dann die Sätze über das elementare Rechnen mit Folgen aus der Vorlesung bzw. Aufgabe 15.