Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau Wintersemester 2017/2018

Analysis 1
Übungsblatt 5

Aufgrund des großen Korrekturaufwandes ist es beginnend mit diesem Übungsblatt leider ***nicht mehr möglich, Hausaufgaben als Einzelperson abzugeben!*** *Bitte suchen Sie sich eine Gruppe, falls noch nicht erfolgt.*

Abgabe und Besprechung am 13.11.17 um 17:00 Uhr im Curie-Hörsaal.

$\mathbb{K}$ bezeichnet immer einen der beiden Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Aufgabe 17 (4 Punkte)
Sei $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$.

(i) Man zeige:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = a.$$

(ii) Folgt umgekehrt aus $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = a$ bereits $\lim_{n\to\infty} a_n = a$?

Aufgabe 18 (4 Punkte)
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\emptyset \neq U \subseteq V$. Zeigen Sie, dass U genau dann ein Vektorraum – ein so genannter *Untervektorraum* von V – ist, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$\forall u \in U \,\forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda u \in U \quad \text{und} \quad \forall u, w \in U : u + w \in U.$$

Aufgabe 19 (4 Punkte)
Seien

$$c(\mathbb{K}) := \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{K}\} \quad \text{und} \quad c_0(\mathbb{K}) := \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

Offensichtlich gilt $c_0(\mathbb{K}) \subseteq c(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Man zeige, dass $c_0(\mathbb{K})$ ein Untervektorraum von $c(\mathbb{K})$ ist und dass $c(\mathbb{K})$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist.

Aufgabe 20 (4 Punkte)
Sei X ein Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf X heißen *äquivalent*, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass gilt: $\forall x \in X : \frac{1}{C}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$.

(i) Zeigen Sie, dass zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ genau dann äquivalent sind, wenn gilt: Konvergiert eine Folge $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ gegen $x \in X$ bezüglich $\|\cdot\|_1$, so konvergiert sie auch bezüglich $\|\cdot\|_2$ gegen x, und umgekehrt. Mit anderen Worten:

$$\forall x \in X \,\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}} : \|x_n - x\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff \|x_n - x\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(ii) Zeigen Sie, dass zwei äquivalente Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ durch $d_i(x, y) := \|x - y\|_i$, $i = 1, 2$ äquivalente Metriken (vgl. Aufgabe 10 auf Übungsblatt 3) induzieren.