Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2017/2018

Analysis 1
Übungsblatt 6

Abgabe und Besprechung am 20.11.17 um 17:00 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 21 (4 Punkte)
Es seien $x, y \in \mathbb{C}$. Für $x = \operatorname{Re} x + i \operatorname{Im} x$ bezeichnen wir mit $\overline{x} := \operatorname{Re} x - i \operatorname{Im} x$ die zu x *konjugiert komplexe Zahl*, und mit $|x| := \sqrt{(\operatorname{Re} x)^2 + (\operatorname{Im} x)^2} = \sqrt{x\overline{x}}$ den *Betrag* von x. Zeigen Sie:

(i) $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\operatorname{Re}(x\overline{y})$.

(ii) $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$ (Parallelogrammidentität).

Aufgabe 22 (4 Punkte)
Auf $\mathbb{K}^n$ sind die folgenden Normen gegeben:

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \quad \text{für } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Zeigen Sie, dass alle drei Normen äquivalent sind (Aufgabe 20 auf Übungsblatt 5) und skizzieren Sie für den Fall $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^2$ die zugehörigen *Einheitssphären* $\mathbb{B}^2_\diamond := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\diamond = 1\}$ für $\diamond \in \{1, 2, \infty\}$.

Aufgabe 23 (4 Punkte)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $d : X \times X \to [0, \infty)$ die von der Norm $\|\cdot\|$ induzierte Metrik.

(i) Zeigen Sie, dass eine Menge $M \subseteq X$ genau dann normbeschränkt ist, wenn ihr metrischer Durchmesser beschränkt ist, mit anderen Worten

$$\exists C \geq 0\, \forall x \in M : \|x\| \leq C \iff \exists K \geq 0\, \forall x, y \in M : d(x, y) \leq K.$$

(ii) Zeigen Sie, dass es einen Vektorraum Y und eine Metrik $\delta : Y \times Y \to [0, \infty)$ gibt, sodass die Metrik δ nicht von einer Norm induziert wird, d. h. für alle Normen $\|\cdot\|$ gilt: $\exists x, y \in X : \delta(x, y) \neq \|x - y\|$.

Aufgabe 24 (4 Punkte)

Es sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein *reeller* Innenproduktraum (d. h. über $\mathbb{R}$), versehen mit der Norm $\|\cdot\| := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. Man zeige, dass für alle $x, y \in X \setminus \{0\}$ gilt:

$$(\|x\| + \|y\|)\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq \|x + y\|.$$

Wann gilt Gleichheit?

Bemerkung: Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt stets $-1 \leq \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$. Der Ausdruck kann als „Winkelmaß“ interpretiert werden, das angibt, wie stark sich $\|x + y\|$ und $\|x\| + \|y\|$ unterscheiden.

Hinweis: Man quadriere die Ungleichung und verwende die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.