Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau Wintersemester 2017/2018

Analysis 1
Übungsblatt 7

Abgabe und Besprechung am 27.11.17 um 17:00 Uhr im Curie-Hörsaal.

Definition: Mit $\ell_\infty(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^\mathbb{N}$ bezeichnen wir den normierten *Vektorraum der beschränkten Zahlenfolgen*, versehen mit der Supremumsnorm $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$, $(x_n) \in \ell_\infty$.

Aufgabe 25 (4 Punkte)
Es sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn für jede Folge $(y_n) \in Y^\mathbb{N}$, die in X konvergiert, gilt: $\lim_{n\to\infty} y_n \in Y$.

Zeigen Sie: $c_0(\mathbb{K})$ (wie in Aufgabe 19 auf Übungsblatt 5 definiert) ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $\ell_\infty(\mathbb{K})$.

Aufgabe 26 (4 Punkte)
Für $a \in (0, \infty)$ definieren wir die reelle Folge (x_n) rekursiv durch $x_0 \geq \sqrt{a}$ und

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Man beweise, dass (x_n) monoton fallend gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 27 (4 Punkte)
Für die Folgen

$$(x_n) := (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots), \quad (y_n) := (2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \dots)$$

bestimme man

(i) $\limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$,

(ii) $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n)$,

(iii) $\liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$,

(iv) $\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n)$,

(v) $\liminf_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$.

Aufgabe 28 (4 Punkte)
Seien $(x_n), (y_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ Folgen mit $\liminf x_n, \liminf y_n, \limsup x_n, \limsup y_n \in \mathbb{R}$. Man verifiziere die folgenden Aussagen:

(i) $\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$,

(ii) $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$,

(iii) $\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geq \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$.