Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2017/2018

Analysis 1
Übungsblatt 8

Abgabe und Besprechung am 04.12.17 um 17:00 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 29 (4 Punkte)
Zeigen Sie die Konvergenz der Folge

$$x_0 > 0, \quad x_1 > 0, \quad x_{n+2} := \sqrt{x_{n+1}x_n},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 30 (4 Punkte)
Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Grenzwertbeziehung zu beweisen:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Dazu zeige man die folgenden Behauptungen:

(i) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $x_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : (1 + \frac{1}{n})^n \leq x_n$.

(iii) Die für $n \geq m$ definierte Folge

$$x'_{m,n} := 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)$$

erfüllt $x'_{m,n} \xrightarrow{n\to\infty} x_m$ und $x'_{m,n} \leq (1 + \frac{1}{n})^n$.

(iv) $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq \mathrm{e}$.

(v) Folgern Sie nun die oben stehende Grenzbeziehung.

Hinweis: Man sehe sich den Beweis der Konvergenz von $(1 + \frac{1}{n})^n$ *aus der Vorlesung an.*

Aufgabe 31 (4 Punkte)
Zeigen Sie: $c_0(\mathbb{K})$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, ist ein Banachraum.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 25.

Aufgabe 32 (4 Punkte)
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Des Weiteren existiere ein $\alpha \in (0, 1)$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}).$$

Beweisen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert!