Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2017/2018

Analysis 1
Übungsblatt 10

Abgabe und Besprechung am 18.12.17 um 17:00 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 37 (2 Punkte)
Sei $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ und für $k \in \mathbb{N}^*$ sei

$$x_k := \begin{cases} (\alpha, \beta), & k \text{ gerade}, \\ (\beta, \alpha), & k \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x_k$ in $\mathbb{R}^2$ konvergiert!

Aufgabe 38 (4 Punkte)
Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k-1}}$, (ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-a^{2k}}{1+a^{2k}}$.

Aufgabe 39 (6 Punkte)
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k/k!$ heißt *Cantorreihe*, falls die Koeffizienten c_k ganzzahlig sind und $0 \le c_k \le k-1$ für $k \ge 2$ erfüllen. Man beweise:

(i) Jede nichtnegative reelle Zahl x kann als Wert einer Cantorreihe dargestellt werden, d. h. es gibt eine Cantorreihe mit $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k/k!$. Diese Darstellung ist eindeutig, falls fast alle c_k von $k-1$ verschieden sind.

(ii) Für die Reihenreste der Cantorreihe mit $c_k = k-1$, $k \ge 2$ gilt

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(iii) Es sei $x \in [0,1)$ gemäß (i) dargestellt durch die Cantorreihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k/k!$, wobei für fast alle $k \in \mathbb{N}^*$ gilt, dass $c_k \ne k-1$ ist. Dann ist x genau dann rational, wenn es ein $k_0 \in \mathbb{N}^*$ gibt mit $c_k = 0$ für $k \ge k_0$.

Hinweis: Benutzen Sie (ii) und führen Sie einen Widerspruchsbeweis.

Aufgabe 40 (4 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+4}{10k+5}$, (ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^4}{3^k}$, (iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{6k}}{k^{2k}}$, (iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$.