

## Analysis 1 Übungsblatt 11

Abgabe und Besprechung am 08.01.18 um 17:00 Uhr im Curie-Hörsaal.

### Aufgabe 41 (4 Punkte)

Man beweise die folgenden Abbildungseigenschaften der Exponentialfunktion:

- (i)  $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist strikt wachsend.
- (iii) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es  $x < 0$  und  $y > 0$  mit  $\exp(x) < \varepsilon$  und  $\exp(y) > \frac{1}{\varepsilon}$ .

### Aufgabe 42 (6 Punkte)

Es sei

$$\ell_1(\mathbb{K}) := \left\{ (x_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty \right\}, \quad \|(x_k)\|_1 := \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$$

und

$$\ell_{\infty}(\mathbb{K}) := \left\{ (x_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\}, \quad \|(x_k)\|_{\infty} := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|.$$

Man beweise:

- (i)  $\|\cdot\|_1$  definiert eine Norm auf  $\ell_1(\mathbb{K})$  und  $(\ell_1(\mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$  ist ein Banachraum.
- (ii)  $\ell_1(\mathbb{K})$  ist ein echter Unterraum von  $\ell_{\infty}(\mathbb{K})$  und es gilt  $\|(x_n)\|_{\infty} \leq \|(x_n)\|_1$  für alle  $(x_n) \in \ell_1(\mathbb{K})$ .
- (iii)  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_{\infty}$  sind auf  $\ell_1(\mathbb{K})$  nicht äquivalent.

*Hinweis:* Man betrachte die Folge  $(y_j)$  mit  $y_j := (x_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}$ , wobei

$$x_{j,k} = \begin{cases} 1, & k \leq j, \\ 0, & k > j. \end{cases}$$

### Aufgabe 43 (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k X^k$ , wenn  $a_k$  für  $k \in \mathbb{N}^*$  gegeben ist durch

$$(i) \left(2 + \frac{1}{k^2}\right)^k, \quad (ii) \frac{1}{\sqrt{k!}}, \quad (iii) \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \quad (iv) (-1)^k \frac{k!}{k^k}.$$

### Aufgabe 44 (4 Punkte)

Man verifiziere, dass die Potenzreihe  $a := \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)X^k$  den Konvergenzradius 1 besitzt und dass für die durch  $a$  dargestellte Funktion  $\underline{a}$  gilt:  $\underline{a}(z) = (1-z)^{-2}$  für  $|z| < 1$ .