Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau Wintersemester 2017/2018

Analysis 1
Übungsblatt 13

Abgabe und Besprechung am 22.01.18 um 17:00 Uhr im Curie-Hörsaal.

Kanonischerweise versehen wir $\mathbb{K}^n$ stets mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$.

Aufgabe 49 (4 Punkte)
Man beweise oder widerlege: Die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x < \sqrt{2} \\ 1, & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

ist stetig.

Definition: Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ und Y ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *linksseitig* (bzw. *rechtsseitig*) *stetig* im Punkt $x_0 \in X$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0] \text{ (bzw. } [x_0, x_0 + \delta)) : d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Aufgabe 50 (4 Punkte)
In welchen Punkten ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -1, & x \geq 1 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}, \; n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

stetig, bzw. linksseitig oder rechtsseitg stetig?

Aufgabe 51 (4 Punkte)
Betrachtet wird die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Für jedes feste $x_0 \in \mathbb{R}$ (insbesondere für $x_0 = 0$) sind die Abbildungen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto f(x, x_0) \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto f(x_0, x).$$

stetig.

(ii) f ist unstetig im Punkt $(0, 0)$.

Aufgabe 52 (4 Punkte)
Eine Funktion $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ heißt *linear*, falls sie folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^m \, \forall \alpha \in \mathbb{K} : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

Zeigen Sie, dass jede lineare Abbildung f Lipschitz-stetig ist.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 22.