Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2017/2018

Analysis 1
Übungsblatt 14

Abgabe und Besprechung am 29.01.18 um 17:00 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 53 (4 Punkte)

Es sei X ein metrischer Raum. Für $M \subseteq X$ bestimme man $\overline{M}$, M° und ∂M, wenn gilt

(i) $M = (0,1]$, $X = \mathbb{R}$,

(ii) $M = (0,1] = (0,1] \times \{0\}$, $X = \mathbb{R}^2$,

(iii) $M = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$, $X = \mathbb{R}$,

(iv) $M = \mathbb{Q}$, $X = \mathbb{R}$.

Aufgabe 54 (4 Punkte)

Sei X eine nichtleere Menge, versehen mit der diskreten Metrik.

(i) Zeigen Sie, dass jede Teilmenge von X offen ist.

(ii) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen gilt

$$\overline{\mathbb{B}}(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \le r\} \ne \overline{\{y \in X \mid d(x,y) < r\}} = \overline{\mathbb{B}(x,r)}.$$

Aufgabe 55 (4 Punkte)

Sei X ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$. Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(i) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

(ii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Aufgabe 56 (4 Punkte)

Es seien X und Y metrische Räume. Beweisen Sie:

$$f : X \to Y \text{ ist stetig} \iff \forall A \subseteq X : f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Hinweis: Für $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ betrachten Sie $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.