Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2017/2018

Analysis 1
Übungsblatt 15

Besprechung am 05.04.18 um 15:00 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 57
Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $X \setminus A^\circ = \overline{(X \setminus A)}$,

(ii) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

Aufgabe 58
Sei X ein metrischer Raum und $(A_i) \in (\mathfrak{P}(X) \setminus \emptyset)^{\mathbb{N}_0}$ mit A_i abgeschlossen und $A_{i+1} \subseteq A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Des Weiteren sei A_0 kompakt. Zeigen Sie, dass $\cap_{i=0}^{\infty} A_i \neq \emptyset$ gilt!

Aufgabe 59

(i) Es sei X ein kompakter metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Beweisen Sie, dass Y genau dann kompakt ist, wenn Y abgeschlossen ist!

(ii) Sei K ein kompakter und Y ein beliebiger metrischer Raum. $f : K \to Y$ sei stetig und bijektiv. Zeigen Sie, dass $f^{-1} : Y \to K$ stetig ist!

Aufgabe 60
Zeigen Sie, dass jeder endlich-dimensionale Untervektorraum F eines normierten Vektorraumes E abgeschlossen ist.

Hinweis: Sei $(v_n) \in F^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} v_n = v \in E$. Zeigen Sie mithilfe von Satz III.1.10 und dem Satz von Bolzano-Weierstraß, dass eine Teilfolge (v_{n_k}) von (v_n) existiert mit $\lim_{k\to\infty} v_{n_k} = w \in F$. Folgern Sie nun, dass $v = w \in F$ ist.