Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Sommersemester 2018

Analysis 2
Übungsblatt 1

Abgabe und Besprechung am 12.04.18 um 15:**15** Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 1
Überprüfen Sie, ob die Funktionen

(i) $f : [\frac{1}{100}, \infty) \to (0, \infty)$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$,

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

Lipschitz-stetig sind!

Aufgabe 2
Es seien X, Y metrische Räume und $A \times B \subseteq X \times Y$. Wir versehen $X \times Y$ mit der Produktmetrik

$$d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y.$$

Beweisen Sie:

$$\delta(A \times B) = (\delta A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \delta B).$$

Aufgabe 3
Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, wenn $M^\top M = I_n$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$O(n) := \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid M \text{ orthogonal}\}$$

eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

Hinweis: Fassen Sie $\mathbb{R}^{n\times n}$ als $\mathbb{R}^{n^2}$, versehen mit der euklidischen Norm, auf, stellen Sie die Matrixmultiplikation mithilfe von Skalarprodukten dar und benutzen Sie Satz III.1.10.

Aufgabe 4
Es sei X ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie:

$$A \text{ totalbeschränkt} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A} \text{ kompakt}.$$

Hinweis: Benutzen Sie Theorem III.3.10.