Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau Sommersemester 2018

Analysis 2
Übungsblatt 2

Abgabe und Besprechung am 19.04.18 um 15:15 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir versehen X und $\{0,1\}$ mit der euklidischen Metrik von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) X ist zusammenhängend.

(ii) Es gibt keine surjektive, stetige Abbildung $f : X \to \{0,1\}$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Es sei X ein metrischer Raum, I eine beliebige Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $C_i \subseteq X$ zusammenhängend. Weiterhin gelte

$$\forall i, j \in I : C_i \cap C_j \neq \emptyset.$$

Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i \in I} C_i$ zusammenhängend ist.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 5.

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Es seien X_i, $i = 1, \ldots, n$ metrische Räume. Zeigen Sie:

$$X_1 \times \cdots \times X_n \text{ zusammenhängend } \iff \forall i = 1, \ldots, n : X_i \text{ zusammenhängend.}$$

Dabei sei $X_1 \times \cdots \times X_n$ mit der Produktmetrik versehen.

Hinweis: Zerlegen Sie $X \times Y$ in eine Vereinigung von Mengen der Form $(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$.

In der folgenden Aufgabe bezeichnet $\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}$ die aus der Schule bekannte Ableitung i-ter Ordnung, $t \to \mathrm{e}^t$ die Exponentialfunktion, $t \mapsto \sin(t)$ und $t \mapsto \cos(t)$ Sinus und Cosinus. Sie dürfen das aus der Schule bekannte Wissen über die Ableitungen nutzen.

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Es seien $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$p_n \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}(t) + p_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}}(t) + \cdots + p_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + p_0 x(t) = 0 \qquad (\star)$$

homogene, lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten n-ter Ordnung. Eine *Lösung* dieser Differentialgleichung ist eine n-fach differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $(\star)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Das Polynom

$$p(s) = p_n s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \cdots + p_1 s + p_0 \in \mathbb{R}[s]$$

heißt *charakteristisches Polynom* der Differentialgleichung.

Zeigen Sie:

(i) Sind x, y Lösungen der Differentialgleichung $(\star)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha x + y$ eine Lösung von $(\star)$.

(ii) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von $(\star)$, d. h. $p(\lambda) = 0$, so ist $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ eine Lösung von $(\star)$.

Hinweis: Setzen Sie die angegebene Funktion in $(\star)$ ein und klammern Sie aus.

(iii) Ist $p(s) = (s - \lambda)^2$, so sind $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $t \mapsto t\mathrm{e}^{\lambda t}$ Lösungen von $(\star)$.

(iv) Die Funktionen $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $t \mapsto t\mathrm{e}^{\lambda t}$ sind linear unabhängig.

(v) Ist $p(s) = (s - i)(s + i) = s^2 + 1$, so sind $t \mapsto \sin(t)$ und $t \mapsto \cos(t)$ Lösungen von $(\star)$.