Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau Sommersemester 2018

# Analysis 2
## Übungsblatt 3

Abgabe und Besprechung am 26.04.18 um 15:15 Uhr im Curie-Hörsaal.

**Aufgabe 9** (4 Punkte)
Es sei $E$ ein normierter Vektorraum mit Dimension $\dim(E) \geq 2$. Dann sind $E \setminus \{0\}$ und die Einheitssphäre $S := \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ zusammenhängend.

**Aufgabe 10** (4 Punkte)
Wir betrachten die Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, \tfrac{1}{\pi}], y = \sin(\tfrac{1}{x})\} \cup \{(0,0)\},$$

versehen mit der euklidischen Metrik im $\mathbb{R}^2$.

(i) Zeichnen Sie $M \subset \mathbb{R}^2$.

(ii) Zeigen Sie, dass $M \setminus \{(0,0)\}$ offen in $M$ und zusammenhängend ist.

*Hinweis:* Finden Sie $c : [0,1) \to \mathbb{R}^2$ stetig, so dass $c([0,1)) = M \setminus \{(0,0)\}$ ist.

(iii) Zeigen Sie mithilfe von (ii), dass $M$ zusammenhängend ist.

(iv) Zeigen Sie, dass $M$ *nicht* wegzusammenhängend ist.

*Hinweis:* Nehmen Sie die Existenz eines geeigneten stetigen Wegs $\gamma$ an und betrachten Sie $t_0 := \sup\{t \in [\alpha, \beta] \mid \gamma(t) = (0,0)\}$.

**Aufgabe 11** (4 Punkte)
Sei $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to I$ eine stetige Abbildung.

(i) Zeigen Sie, dass $f$ einen *Fixpunkt* besitzt, d. h. $\exists \xi \in I : f(\xi) = \xi$.

(ii) Gilt die Aussage von (i) auch, wenn $I$ nicht kompakt ist?

**Aufgabe 12** (4 Punkte)
Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Das *Matrixeponential* $\mathrm{e}^A$ ist definiert durch die Reihe

$$\mathrm{e}^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{e}^A$ ist für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ wohldefiniert und es gilt $\mathrm{e}^A A = A\,\mathrm{e}^A$.

*Hinweis:* Nutzen Sie eine geeignete Norm, die $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ erfüllt (so genannte Submultiplikativität), und das Majorantenkriterium.

(ii) $\forall t \in \mathbb{R} : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tA} := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\mathrm{e}^{(t+h)A} - \mathrm{e}^{tA}) = A\mathrm{e}^{tA}$.

(iii) Ist $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}^*$, d. h. $Av = \lambda v$, dann gilt für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $f(t) := \mathrm{e}^{tA}v$, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = \lambda f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ ist.