Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Sommersemester 2018

Analysis 2
Übungsblatt 4

Abgabe und Besprechung am 03.05.18 um 15:15 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 13 (4 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen über den Hauptwert der Potenz bzw. des Logarithmus:

(i) $\forall z \in \mathbb{C}^*, a, b \in \mathbb{C} : (z^a)^b = (z^b)^a$,

(ii) $\forall z, w \in \mathbb{C}^*, a, b \in \mathbb{C} : z^a z^b = z^{a+b}$,

(iii) $\forall z, w \in \mathbb{C}^* : \log(zw) = \log(z) + \log(w)$,

(iv) $\forall z \in \mathbb{C}^*, a \in \mathbb{C} : \log(z^a) = a \log(z)$.

Aufgabe 14 (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass der Hauptwert des Arguments und des Logarithmus, eingeschränkt auf den Definitionsbereich

$$\arg : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to (-\pi, \pi), \qquad \log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{R} + i(-\pi, \pi),$$

stetig sind.

Hinweis: Nutzen Sie

$$\arg = \arg \circ \nu \quad \text{mit} \quad \nu(z) := \frac{z}{|z|},\ z \in \mathbb{C}^*,$$
$$\arg|_{S^1 \setminus \{-1\}} = (\operatorname{cis}|_{(-\pi,\pi)})^{-1} \quad \text{mit} \quad \operatorname{cis}(t) := \mathrm{e}^{it},\ t \in \mathbb{R}$$

und Aufgabe 59(ii) aus Analysis 1.

Aufgabe 15 (4 Punkte)

(i) Bestimmen Sie alle Lösungen folgender Gleichungen in $\mathbb{C}$:

$$z^4 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \qquad z^5 = i.$$

(ii) Berechnen Sie den Hauptwert von i^i.

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Es seien $p_0, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Differentialgleichung n-ter Ordnung mit vorgegebenen *Anfangswerten*

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}(t) + p_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}(t) + \dots + p_0 x(t) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^i x}{\mathrm{d}t^i}(0) = x_i^0 \in \mathbb{R},\ i = 0, \dots, n-1. \quad (1)$$

Mittels der Substitution

$$y_1 := x, \quad y_2 := \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dots, y_n := \frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}$$

lässt sich diese Differentialgleichung in eine (vektorwertige) Differentialgleichung 1. Ordnung überführen:

$$\dot{y} = Ay, \quad y(0) = y^0 \qquad (2)$$

mit $y := (y_1, \dots, y_n)^\top$ und geeignetem $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$.

(i) Bestimmen Sie A und y^0 und zeigen Sie, dass x genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn $y = (x, \dots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}})^\top$ eine Lösung von (2) ist.

(ii) Beweisen Sie: $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}y^0$ löst (2).

(iii) Bestimmen Sie mithilfe von (ii) eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) - 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 2x(t) = 0, \quad x(0) = 1,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{bmatrix}$ durch vollständige Induktion.

(iv) Zeigen Sie, dass $\det(sI_n - A) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0$ ist.