Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Sommersemester 2018

Analysis 2
Übungsblatt 5

Abgabe und Besprechung am 17.05.18 um 15:15 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 17 (4 Punkte)
Man bestimme die Ableitungen von $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, falls f durch

(i) $(x^x)^x$, (ii) $x^{(x^x)}$, (iii) $x^{\frac{1}{x}}$, (iv) $\log(\log(1 + x))$, (v) $\frac{\cos(x)}{2+\sin(\log(x))}$

gegeben ist.

Aufgabe 18 (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ in keinem Punkt differenzierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto z\overline{z}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie deren Ableitung.

(iii) In welchen Punkten ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z\overline{z}$ differenzierbar?

Aufgabe 19 (4 Punkte)
Es sei $U \subseteq \mathbb{K}$ eine Umgebung der Null, E ein normierter Vektorraum und $f : U \to E$. Zeigen Sie:

(i) $\exists K > 0\, \exists \alpha > 1\, \forall x \in U : |f(x)| \leq K|x|^\alpha \implies f$ ist differenzierbar in 0.

(ii) $f(0) = 0 \wedge \exists K > 0\, \exists \alpha \in (0, 1)\, \forall x \in U : |f(x)| \geq K|x|^\alpha \implies f$ ist nicht differenzierbar in 0.

(iii) Diskutieren Sie den Fall $\exists K > 0\, \forall x \in U : |f(x)| = K|x|$.

Aufgabe 20 (4 Punkte)
Es seien E ein normierter Vektorraum, $U \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in U$ und $f : U \to E$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist f in a differenzierbar, so gilt

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}. \tag{1}$$

(ii) Existiert $\lim_{h\to 0}[f(a+h) - f(a - h)]/2h$, so ist f in a differenzierbar und es gilt (1).

Aufgabe 21 (4 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ linear unabhängig mit

$$(A - \lambda I_n)v_1 = 0,\ (A - \lambda I_n)v_2 = v_1,\ \dots,\ (A - \lambda I_n)v_k = v_{k-1}$$

(so genannte *Hauptvektoren* von A).

(i) Bestimmen Sie solche $v_1, \dots, v_n$ für

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(ii) Zeigen Sie: $x_1, \dots, x_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^{\lambda t} v_1 \\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{\lambda t}(v_2 + t v_1), \\ &\vdots \\ x_k(t) &= \mathrm{e}^{\lambda t}\left(v_k + t v_{k-1} + \cdots + \tfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1\right) \end{aligned}$$

sind linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

(iii) Bestimmen Sie mithilfe von (ii) eine Lösung von

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -11 & -9 & -14 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$