Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Sommersemester 2018

Analysis 2
Übungsblatt 6

Abgabe und Besprechung am 24.05.18 um 15:15 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 22 (4 Punkte)
Wir betrachten zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $f' = f$, $g' = g$ und $f(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Man zeige:

(i) $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

(ii) $\exists c \in \mathbb{R} : g = cf$.

Aufgabe 23 (4 Punkte)
Es sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ sei in $(a, b]$ differenzierbar. Ferner existiere der Grenzwert $\lim_{x\to a} f'(x)$. Beweisen Sie, dass f in a differenzierbar ist und $f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)$ gilt.

Aufgabe 24 (4 Punkte)
Es sei $a > 0$ und $f \in C^2([-a, a], \mathbb{R})$ sei gerade, d. h. $\forall x \in [-a, a] : f(-x) = f(x)$. Zeigen Sie, dass ein $g \in C^1([0, a^2], \mathbb{R})$ existiert mit $f(x) = g(x^2)$ für $x \in [-a, a]$. Insbesondere gilt $f'(0) = 0$.

Aufgabe 25 (4 Punkte)
Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \tag{1}$$

Die Menge der Lösungen der Differentialgleichung bezeichnen wir mit

$$\mathcal{M} := \{x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid x \text{ erfüllt (1) für alle } t \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{e}^{tA}x^0$ die einzige Lösung von (1) mit $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie $t \mapsto \mathrm{e}^{-tA}x(t)$.

(ii) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{M}$:

(a) Die Funktionen $x_1, \dots, x_k$ sind linear unabhängig.

(b) $x_1(t), \dots, x_k(t)$ sind linear unabhängig für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) $x_1(t), \dots, x_k(t)$ sind linear unabhängig für ein $t \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie weiterhin, dass (a) – (c) für allgemeine Funktionen $x_1, \dots, x_k \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ nicht äquivalent sind.

(iii) Geben Sie einen Vektorraumisomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}$ an.