Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Sommersemester 2018

Analysis 2
Übungsblatt 7

Abgabe und Besprechung am 31.05.18 um 15:15 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 26 (4 Punkte)
Zeigen Sie unter Verwendung des Mittelwertsatzes die Richtigkeit der folgenden Ungleichungen:

(i) $\forall x > 0 : \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$,

(ii) $\forall x > 1 : 1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$.

Aufgabe 27 (4 Punkte)
Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Die *Landauschen Symbole* sind definiert als

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a) \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to a) \quad :\Longleftrightarrow \quad \limsup_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty.$$

Wir schreiben $f(x) = h(x) + o(g(x))$ für $f(x) - h(x) = o(g(x))$ und analog für O.

Zeigen Sie:

(i) Es gilt $f = O(g(x))$ $(x \to a)$ genau dann, wenn eine Umgebung U von a und ein $C > 0$ existieren mit $\forall x \in U : |f(x)| \leq C|g(x)|$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall \alpha > 0 : x(\log x)^n = o(x^{1+\alpha})$ $(x \to \infty)$.

(iii) $f(x) = 1 + ax + bx^2 + o(x^2)$ $(x \to 0)$ $\implies$ $\frac{1}{f(x)} = 1 - ax + (a^2 - b)x^2 + o(x^2)$ $(x \to 0)$.

Aufgabe 28 (4 Punkte)
Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$, und $a \in X$ ein Häufungspunkt von $X \cap [a, \infty)$. Dann heißt $f : X \to E$ in a *rechtsseitig differenzierbar*, falls

$$\partial_+ f(a) := \lim_{x\to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

in E existiert, und $\partial_+ f(a) \in E$ heißt *rechtsseitige Ableitung* von f in a. Ist a ein Häufungspunkt von $(-\infty, a] \cap X$, und existiert

$$\partial_- f(a) := \lim_{x\to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{in } E,$$

so ist f in a *linksseitig differenzierbar*, und $\partial_- f(a)$ ist die *linksseitige Ableitung* von f in a.

Es sei $-\infty < a < b < \infty$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei konvex. Man beweise oder widerlege:

(i) Für jedes $x \in (a, b)$ existieren $\partial_\pm f(x)$, und es gilt $\partial_- f(x) \leq \partial_+ f(x)$.

(ii) $f|_{(a,b)}$ ist stetig.

(iii) f ist stetig.

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$. Für den Eigenwert λ_i bezeichne $\mathrm{av}(\lambda_i)$ die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwerts, d. h. die Vielfachheit der Nullstelle λ_i des charakteristischen Polynoms, und $\mathrm{gv}(\lambda_i)$ sei die *geometrische Vielfachheit*, d. h. $\mathrm{gv}(\lambda_i) := \dim\ker(A - \lambda_i I_n)$.

Die Matrix

$$J(\lambda, p) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{p\times p}$$

heißt *Jordankästchen* der Größe p zum Eigenwert λ (es gilt $J(\lambda, 1) := \lambda$), die Blockdiagonalmatrix

$$J(\lambda, p_1, \dots, p_l) = \begin{bmatrix} J(\lambda, p_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda, p_l) \end{bmatrix}$$

heißt *Jordanblock* zum Eigenwert λ. In der linearen Algebra zeigt man, dass es für jedes $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ein $S \in GL_n(\mathbb{C})$ gibt, sodass

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} J(\lambda_1, p_{1,1}, \dots, p_{1,\mathrm{gv}(\lambda_1)}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda_k, p_{k,1}, \dots, p_{k,\mathrm{gv}(\lambda_k)}) \end{bmatrix}$$

gilt (die so genannte *Jordansche Normalform* von A). Dabei gilt $\sum_{j=1}^{\mathrm{gv}(\lambda_i)} p_{i,j} = \mathrm{av}(\lambda_i)$.

Beweisen Sie:

(i) Es gilt $\mathrm{e}^{SAS^{-1}} = S\mathrm{e}^A S^{-1}$.

(ii) Für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $AB = BA$ gilt $A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B A$ und $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$.

(iii) Es gibt $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\mathrm{e}^{A+B} \neq \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$.

(iv) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

   (a) Für jede Lösung u von $\dot{x}(t) = Ax(t)$ in $\mathbb{C}^n$ gilt $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$.

   (b) Für alle $\lambda \in \sigma(A)$ gilt $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

   Hinweis: Berechnen Sie $\mathrm{e}^{J(\lambda,p)}$ mithilfe von (ii).