Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Sommersemester 2018

Analysis 2
Übungsblatt 8

Abgabe und Besprechung am 07.06.18 um 15:15 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 30 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ im Punkt 1 für

(i) $f(z) = 3z^3 - 7z^2 + 2z + 4$, (ii) $f(z) = e^z$.

Aufgabe 31 (4 Punkte)
Es seien X, Λ metrische Räume, X vollständig und $f \in C(X \times \Lambda, X)$. Außerdem gelte

$$\exists \alpha \in [0,1)\, \forall \lambda \in \Lambda\, \exists q(\lambda) \in [0,\alpha]\, \forall x, y \in X : d(f(x,\lambda), f(y,\lambda)) \le q(\lambda) d(x,y).$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt $f(\cdot,\lambda)$ für jedes $\lambda \in \Lambda$ genau einen Fixpunkt $x(\lambda) \in X$. Beweisen Sie: $(\lambda \mapsto x(\lambda)) \in C(\Lambda, X)$.

Aufgabe 32 (4 Punkte)
Es sei $X \subseteq \mathbb{K}$ konvex und $f \in C^n(X, \mathbb{K})$ für ein $n \in \mathbb{N}^*$. $x_0 \in X$ heißt *Nullstelle der Ordnung (oder auch Vielfachheit)* n von f, falls gilt

$$f(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Zeigen Sie: f besitzt im Punkt $x_0 \in X$ genau dann eine Nullstelle, deren Ordnung mindestens n ist, wenn eine Funktion $g \in C(X, \mathbb{K})$ existiert mit

$$\forall x \in X : f(x) = (x - x_0)^n g(x).$$

Aufgabe 33 (4 Punkte)
Für $k \in \mathbb{N}^*$ sei

$$A_k = -\begin{bmatrix} k & k^3 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad D_k = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von A_k und zeigen Sie, dass für jede Lösung u der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = A_k x(t)$$

gilt, dass $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ ist. Bestimmen Sie weiterhin ein $x^0 \in \mathbb{R}^2$, sodass die Lösung von

$$\dot{x}(t) = (A_k + D_k)x(t), \ x(0) = x^0$$

nicht gegen 0 konvergiert.