Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Sommersemester 2018

Analysis 2
Übungsblatt 9

Abgabe und Besprechung am 14.06.18 um 15:15 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 34 (4 Punkte)
Entscheiden Sie, welche der Funktionenfolgen (f_n) auf $X := (0,1)$ gleichmäßig konvergieren, wenn $f_n(x)$ gegeben ist durch

(i) $\sqrt[n]{x}$, (ii) $\frac{1}{1+nx}$, (iii) $\frac{x}{1+nx}$.

Aufgabe 35 (4 Punkte)
Es seien E ein Banachraum und $-\infty < a < b < \infty$. Gegeben sei eine Folge $(f_n) \in (C^1([a,b],E))^{\mathbb{N}}$. Die Folge (f_n') konvergiere gleichmäßig, und es gebe es ein $x_0 \in [a,b]$, für welches $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass (f_n) gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 36 (4 Punkte)
Man betrachte eine Doppelfolge (x_{jk}) in einem Banachraum E mit

(i) $(x_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert für jedes $j \in \mathbb{N}$ und

(ii) $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall m,n \geq N\, \forall k \in \mathbb{N} : |x_{mk} - x_{nk}| < \varepsilon$.

Beweisen Sie, dass $(x_{jk})_{j\in\mathbb{N}}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert und die Grenzwerte

$$\lim_{j\to\infty} \lim_{k\to\infty} x_{jk} = \lim_{k\to\infty} \lim_{j\to\infty} x_{jk}$$

existieren und identisch sind.

Aufgabe 37 (4 Punkte)
Für $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$, $f, g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$p_n x^{(n)}(t) + p_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1 \dot{x}(t) + p_0 x(t) = f(t). \tag{1}$$

Mit $\mathcal{M}(f) := \{x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \mid x \text{ erfüllt (1) für alle } t \in \mathbb{R}\}$ bezeichnen wir die Lösungsmenge der Differentialgleichung.

(i) Zeigen Sie: Ist $x_0 \in \mathcal{M}(f)$ eine beliebige Lösung von (1), so gilt $\mathcal{M}(f) = x_0 + \mathcal{M}(0)$ (d. h. die Lösungsmenge ist ein affiner Raum).

(ii) Ist $x_1 \in \mathcal{M}(f)$, $x_2 \in \mathcal{M}(g)$, so ist $x_1 + x_2 \in \mathcal{M}(f+g)$.

(iii) Ist $p(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i$, $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ ein Polynom k-ten Grades, so existiert eine Lösung $x \in \mathcal{M}(p)$, die ebenfalls ein Polynom maximal $(k+n)$-ten Grades ist.

(iv) Lösen Sie die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + x(t) = t^2$, $x(0) = \dot{x}(0) = 1$.