Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau Sommersemester 2018

Analysis 2
Übungsblatt 11

Abgabe und Besprechung am 28.06.18 um 15:15 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 42 (4 Punkte)
Es sei I ein kompaktes, perfektes Intervall und E ein Banachraum.

(i) Zeigen Sie, dass $f : I \to E$ genau dann eine Regelfunktion ist, wenn es eine normal konvergente Reihendarstellung $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ bestehend aus Treppenfunktionen $f_n : I \to E$ gibt.

(ii) Beweisen Sie, dass eine Regelfunktion höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzen kann.

Aufgabe 43 (4 Punkte)
Es seien E und F normierte Vektorräume und $A \in \operatorname{Hom}(E, F)$.

(i) A sei surjektiv. Zeigen Sie:

$$A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E) \iff \exists \alpha > 0 \, \forall x \in E : \alpha \|x\| \leq \|Ax\|.$$

(ii) Es sei $A \in \mathcal{L}(E, F)$ und $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. Zeigen Sie: $\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}$.

(iii) Es seien E und F endlichdimensional und $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. Beweisen Sie, dass jedes $B \in \mathcal{L}(E, F)$ mit

$$\|A - B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 44 (4 Punkte)
Die lineare Abbildung $A \in \operatorname{End}(\mathbb{K}^n)$ besitze bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{K}^n$ die Darstellungsmatrix $[a_{jk}]_{j,k=1,\ldots,n}$. Zeigen Sie, dass für $E_j = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_j)$ gilt:

(i) $\|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E_1)} = \max_{k=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|$,

(ii) $\|A\|_{\mathcal{L}(E_\infty, E_\infty)} = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|$.

Aufgabe 45 (4 Punkte)
Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gebe es eine symmetrische, positiv definite Lösung $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der Gleichung

$$A^\top P + PA = -I_n,$$

und die *Lyapunovfunktion* V sei definiert als

$$V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\top P x.$$

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

und eine beliebige Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ derselben.

(i) Geben Sie ein $\alpha > 0$ unabhängig von x an, sodass gilt

$$\forall t \geq 0 : \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t)) \leq -\alpha V(x(t)).$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass

$$\exists \underline{k}, \overline{k} > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^n : \underline{k} \|x\|^2 \leq x^\top P x \leq \overline{k} \|x\|^2.$$

(ii) Zeigen Sie für α aus Teil (i), dass ein $\beta \geq 1$ unabhängig von x existiert, sodass

$$\forall t \geq 0 : \|x(t)\| \leq \beta \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2} t} \|x(0)\|.$$

Hinweis: Finden Sie eine Stammfunktion von $\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t))}{V(x(t))} + \alpha$.

(iii) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (ii):

$$\exists M \geq 1, \lambda > 0 \, \forall t \geq 0 : \|\mathrm{e}^{tA}\| \leq M \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$