Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Sommersemester 2018

Analysis 2
Übungsblatt 12

Abgabe und Besprechung am 05.07.18 um 15:15 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 46 (4 Punkte)
Es seien $(B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ der Raum der beschränkten Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ und $\delta : B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\delta f := f(0)$. Zeigen Sie, dass $\delta \in \mathcal{L}(B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ ist und bestimmen Sie $\|\delta\|$.

Aufgabe 47 (4 Punkte)
Beweisen Sie: Ist $f : I \to E$ Riemann-integrierbar, dann ist $f \in B(I, E)$.

Aufgabe 48 (4 Punkte)
Es seien $-\infty < a < b < \infty$ und $\mathcal{S}([a, b], \mathbb{R})$ der Raum der Regelfunktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$. Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei $f^+ := \max\{f, 0\}$ und $f^- := \max\{-f, 0\}$. Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{S}([a, b], \mathbb{R})$, so sind auch $f^+, f^- \in \mathcal{S}([a, b], \mathbb{R})$ und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad -\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 49 (4 Punkte)
Es seien $A, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $P = P^\top$ positiv definit und $A^\top P + PA = -I_n$. Weiterhin sei $\delta > 0$ und $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \|g(x)\| \le \delta\|x\|.$$

Wir betrachten die nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax + g(x). \tag{1}$$

Geben Sie ein $\delta > 0$ an, sodass jede Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ von (1) die Bedingung

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

erfüllt.

Hinweis: Betrachten Sie die Lyapunovfunktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\top Px$.