Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau
Sommersemester 2018

Analysis 2
Übungsblatt 13

Abgabe und Besprechung am 12.07.18 um 15:15 Uhr im Curie-Hörsaal.

Aufgabe 50 (4 Punkte)
Es sei I ein kompaktes, perfektes Intervall. Für $f \in \mathcal{S}([a,b],\mathbb{K})$, $p \in [1,\infty)$ sei

$$\|f\|_p := \left(\int_I |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

und $p' := p/(p-1)$ bezeichne den zu p *dualen Exponenten*, wobei $1/0 := \infty$ sei. Man beweise die folgenden Aussagen:

(i) Für $f, g \in \mathcal{S}(I,\mathbb{K})$ gilt die *Höldersche Ungleichung*

$$\left|\int_I fg\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_I |fg|\,\mathrm{d}x \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Youngsche Ungleichung (Theorem IV.2.15).

(ii) Für $f, g \in \mathcal{S}(I,\mathbb{K})$ gilt die *Minkowskische Ungleichung*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

(iii) Für jedes $p \in [1,\infty)$ definiert $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf dem Vektorraum $C([a,b],\mathbb{K})$, aber nicht auf $\mathcal{S}[a,b],\mathbb{K})$.

(iv) Für alle p, q mit $1 \leq p \leq q \leq \infty$ existiert eine Konstante $K > 0$ mit

$$\forall f \in \mathcal{S}([a,b],\mathbb{K}) : \|f\|_p \leq K\|f\|_q.$$

Aufgabe 51 (4 Punkte)
Für $a < b$, $\alpha < \beta$ seien $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und $g, h \in C^1([\alpha,\beta],[a,b])$. Ferner sei

$$F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{g(x)}^{h(x)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Zeigen Sie, dass $F \in C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ gilt und bestimmen Sie F'.

Aufgabe 52 (4 Punkte)
Es seien I ein kompaktes, perfektes Intervall, E ein Banachraum und $f \in C(I \times I, E)$. Zeigen Sie, dass für

$$g : I \to E, \quad x \mapsto \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

gilt: $g \in C(I,E)$.

Aufgabe 53 (4 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die inhomogene, lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t),\ x(0) = x^0. \tag{1}$$

(i) Beweisen Sie, dass (1) eine eindeutige Lösung u besitzt, die gegeben ist durch

$$\forall t \in \mathbb{R} : u(t) = \mathrm{e}^{tA}x^0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

(ii) Berechnen Sie die Lösung $x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \frac{1}{\cos(t)}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 1.$$