Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2018/2019

Analysis 3
Übungsblatt 0

Besprechung am 10.10.18 um 9:00 Uhr in C 113.

Aufgabe I
Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *Markoffmatrix*, d. h.

$$\forall j \neq k : a_{jk} \geq 0 \quad \wedge \quad \forall k \in \{1,\dots,n\} : \sum_{j=1}^{n} a_{jk} = 0.$$

Weiterhin sei für $c \in \mathbb{R}$

$$H_c := \Big\{(x^1,\dots,x^n) \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \sum_{j=1}^{n} x^j = c\Big\}.$$

Zeigen Sie:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^{tA} H_c \subseteq H_c.$$

(Mit anderen Worten: Jede Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = Ax(t)$ mit Anfangswert $x(0) \in H_c$ verbleibt für alle Zeiten in H_c.)

Im Folgenden sei E ein Banachraum, $A \in \mathcal{L}(E)$ und $I : E \to E,\ x \mapsto x$.

Aufgabe II
Beweisen Sie: Für $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \|A\|$ gilt

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\lambda I - A)}\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe III
Zeigen Sie:

$$\mathrm{e}^{tA} = \lim_{n\to\infty} \Big[(I - \tfrac{t}{n}A)^{-1}\Big]^n.$$

Aufgabe IV
Beweisen Sie, dass für $C \subseteq E$ konvex und abgeschlossen folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\forall t \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^{tA} C \subseteq C$,

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > \|A\| : (\lambda I - A)^{-1} C \subseteq C$.