Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2018/2019

Analysis 3
Übungsblatt 1

Abgabe und Besprechung am 17.10.18 um 9:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 1
Für die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definieren wir die *Spur (trace)* von A durch $\operatorname{tr}(A) := \sum_{j=1}^n a_{jj}$. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung $\operatorname{tr} : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ ist linear.

(ii) $\forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n} : \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

(iii) Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ähnlich (d. h. $\exists S \in GL_n(\mathbb{K}) : B = S^{-1}AS$), so ist $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Aufgabe 2
Es seien $x^1, \dots, x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$w(t) := \det[x^1(t), \dots, x^n(t)].$$

Beweisen Sie: w erfüllt die Differentialgleichung

$$\dot{w}(t) = \operatorname{tr}(A)\, w(t).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}(A)}$ gilt.

Aufgabe 3
Zeigen Sie:

$$\mathrm{e}^{tA} = \lim_{n\to\infty} \Big[(I - \tfrac{t}{n}A)^{-1} \Big]^n.$$

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis von Theorem III.6.23.

Aufgabe 4
Es seien E, F und G endlichdimensionale Hilberträume, $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von E und $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Beweisen Sie: Es gibt ein eindeutig bestimmtes $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$, den zu A *adjungierten Operator*, mit

$$\forall x \in E, y \in F : \langle Ax, y \rangle_F = \langle x, A^* y \rangle_E.$$

Dieser ist gegeben durch

$$\forall y \in F : A^* y = \sum_{i=1}^n \langle y, Ae_i \rangle_F \, e_i.$$

Weiterhin ist die Abbildung

$$\mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(F, E),\ A \mapsto A^*$$

konjugiert linear und erfüllt

(i) $\forall A \in \mathcal{L}(E, F), B \in \mathcal{L}(F, G) : (BA)^* = A^* B^*$.

(ii) $\forall A \in \mathcal{L}(E, F) : (A^*)^* = A$.

(iii) $\forall C \in \mathcal{L}_{\mathrm{is}}(E, F) : (C^{-1})^* = (C^*)^{-1}$.