Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2018/2019

Analysis 3
Übungsblatt 2

Abgabe und Besprechung am 24.10.18 um 9:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ habe genau einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i) Bestimmen Sie alle möglichen Jordannormalformen von A (bis auf Permutation) und geben Sie jeweils die geometrische Vielfachheit von λ an.

(ii) Welche der Fälle in (i) kann man nicht aufgrund der geometrischen Vielfachheit von λ unterscheiden? Wie kann der Grad der Nilpotenz von $A - \lambda I_4$ hier helfen?

(iii) Geben Sie ein Beispiel für Jordannormalformen einer Matrix $B \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ an, die auch mit der Betrachtung aus (ii) nicht unterscheidbar sind.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Hauptvektoren und die Jordannormalform von

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Wir bezeichnen mit $(C([a,b],\mathbb{C}), \|\cdot\|_{L^1})$ den normierten Raum der stetigen Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{C}$ mit der L^1-Norm $\|\cdot\|_{L^1}$, die in Analysis 2, Übungsblatt 13, Aufgabe 50 definiert wurde. $(C([a,b],\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ ist der gleiche Raum versehen mit der Supremumsnorm. Weiterhin seien $f \in C([a,b],\mathbb{C})$ und $v = (v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{C}^n$. Berechnen Sie die Normen der folgenden Operatoren:

(i) $M_f : (C([a,b],\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty) \to (C([a,b],\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty), \quad g \mapsto fg,$

(ii) $L_f : (C([a,b],\mathbb{C}), \|\cdot\|_{L^1}) \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$

(iii) $M_v : (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty), \quad (x_1,\dots,x_n) \mapsto (v_1x_1,\dots,v_nx_n),$

(iv) $L_v : (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{C}, \quad (x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} v_kx_k.$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall, $\tau \in I$, $a : I \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und $x^0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t), \;\; x(\tau) = x^0. \tag{$\star$}$$

Eine stetige Funktion $u : I \to \mathbb{R}$ heißt *Lösung* von ($\star$), wenn $u(\tau) = x^0$ und $\dot{u}(t) = a(t)u(t)$ für $t \in I \setminus E$ gilt, wobei $E \subseteq I$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von a bezeichnet. Zeigen Sie:

(i) $u : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \exp\Big(\int_\tau^t a(s)\,\mathrm{d}s\Big)\, x^0$ ist die eindeutige Lösung von ($\star$).

(ii) Für $I = \mathbb{R}$ und $x^0 \neq 0$ gilt für die Lösung u von ($\star$):

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \iff \lim_{t\to\infty} \int_\tau^t a(s)\,\mathrm{d}s = -\infty.$$

(iii) Für $I = \mathbb{R}$, $x^0 \neq 0$ und a periodisch mit Periode $T > 0$ (d. h. $\forall t \in \mathbb{R} : a(t+T) = a(t)$) gilt für die Lösung u von ($\star$):

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \iff \int_0^T a(s)\,\mathrm{d}s < 0.$$