Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2018/2019

Analysis 3
Übungsblatt 3

Abgabe und Besprechung am **02**.11.18 um 9:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 9 (4 Punkte)
Es seien I ein Intervall, $t_0 \in I$ und $\alpha, \beta, y \in C(I, \mathbb{R})$, $\beta(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Des Weiteren gelte:

$$\forall t \in I : y(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \beta(s) y(s) \,\mathrm{d}s.$$

Zeigen Sie, dass für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$ gilt:

$$y(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s) \mathrm{e}^{\int_s^t \beta(u)\,\mathrm{d}u} \,\mathrm{d}s.$$

Aufgabe 10 (8 Punkte)
Es sei I ein perfektes Interval, $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ auf jedem kompakten Teilintervall stückweise stetig, $t_0 \in I$ und $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x^0. \tag{🎃}$$

Hierzu definieren wir für $k \in \mathbb{N}^*$ die Funktionenfolge $M_k : I \times I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$M_1(\cdot,\cdot) := I_n, \quad M_{k+1}(t,s) := I_n + \int_s^t A(\sigma) M_k(\sigma, s) \,\mathrm{d}\sigma.$$

Weiterhin sei $[a,b] \subseteq I$ ein kompaktes Intervall und $K := \max_{t\in[a,b]} \|A(t)\|$. Zeigen Sie

(i) $\forall t,s \in [a,b]\, \forall k \in \mathbb{N}^* : \|M_{k+1}(t,s) - M_k(t,s)\| \leq \frac{K^k (b-a)^k}{k!}$.

(ii) (M_k) ist gleichmäßig konvergent auf $[a,b] \times [a,b]$.

(iii) Die *Übergangsmatrix* $\Phi(t,s) := \lim_{k\to\infty} M_k(t,s)$ ist wohldefiniert auf $I \times I$.

(iv) Für alle $s,t \in I$ gilt

$$\Phi(t,s) = I_n + \int_s^t A(\sigma_1)\,\mathrm{d}\sigma_1 + \int_s^t A(\sigma_1) \int_s^{\sigma_1} A(\sigma_2)\,\mathrm{d}\sigma_2\,\mathrm{d}\sigma_1 + \cdots .$$

(v) Falls $\forall s,t \in I : A(s)A(t) = A(t)A(s)$ gilt, so ist $\forall s,t \in I : \Phi(t,s) = \mathrm{e}^{\int_s^t A(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma}$.

(vi) Für $A(\cdot) = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $\forall s,t \in \mathbb{R} : \Phi(t,s) = \mathrm{e}^{(t-s)A}$.

(vii) Wenn $E \subset I$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von A bezeichnet, so gilt

$$\forall t \in I \setminus E : \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t,s) = A(t)\Phi(t,s).$$

(viii) $\Phi(\cdot, t_0)x^0$ ist die eindeutige Lösung von (🎃).

(ix) Es gilt $\forall t, s \in I : \Phi(t, t_0) = \Phi(t, s)\,\Phi(s, t_0)$ und $\Phi(t, s)^{-1} = \Phi(s, t)$.

(x) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix von $\dot{x}(t) = -A(t)^\top x(t)$.

Aufgabe 11 (4 Punkte)
Zeigen Sie für $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$A(t) := \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

dass $\sigma(A(t)) = \{-1\}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist und zwei linear unabhängige Lösungen von (🎃) gegeben sind durch

$$x_1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos t + \frac{1}{2}\sin t \\ \sin t - \frac{1}{2}\cos t \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} \cos t - \frac{1}{2}\sin t \\ \sin t + \frac{1}{2}\cos t \end{pmatrix}.$$

(D. h. obwohl $\forall t \in \mathbb{R} : \sigma(A(t)) \subset \mathbb{C}_{<0}$ ist, existieren Lösungen, für die nicht $\|x(t)\| \xrightarrow{t\to\infty} 0$ gilt.)

Aufgabe 12 (4 Punkte)
Wir betrachten das Anfangswertproblem (🎃) aus Aufgabe 10. Bestimmen Sie eine zeitvariante Transformation $U : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass die Koordinatentransformation $z(t) = U(t)^{-1}\,x(t)$ zu

$$\dot{z}(t) = 0$$

führt.