

## Analysis 3 Übungsblatt 4

Abgabe und Besprechung am 07.11.18 um 9:00 Uhr in C 113.

### Aufgabe 13

(4 Punkte)

- (i) Es sei  $C([0, 1], (0, \infty))$  versehen mit der Supremumsnorm. Wir betrachten die Abbildung

$$G : C([0, 1], (0, \infty)) \rightarrow C([0, 1], (0, \infty)), \quad G(f)(x) := \frac{1}{f(x)}.$$

Untersuchen Sie  $G$  auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

- (ii) Gegeben seien Matrizen  $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Bestimmen Sie von der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad f(A) := (A + B)^2 + A + C$$

die Ableitung im Punkt  $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- (iii) Wir betrachten den Raum  $C([0, 1], \mathbb{R})$  mit der Supremumsnorm. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$I : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(f) := \int_a^b f^2(x) dx$$

differenzierbar ist und bestimmen Sie ihre Ableitung.

- (iv) Es seien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $A \in \mathcal{L}(E)$  und  $b, c, d \in E$ . Bestimmen Sie die Ableitung der Abbildung

$$f : E \rightarrow E, \quad f(x) := A(x + b) + \langle x, c \rangle d.$$

Ist die Abbildung  $f$  stetig differenzierbar?

### Aufgabe 14

(4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $f$  überall (total) differenzierbar, aber im Nullpunkt nicht stetig differenzierbar ist.

### Aufgabe 15

(4 Punkte)

Für welche Werte von  $p \in [1, \infty]$  ist die Abbildung

$$f_p : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_p(x) := \|x\|_p$$

differenzierbar bzw. stetig differenzierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an!