Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2018/2019

Analysis 3
Übungsblatt 5

Abgabe und Besprechung am 14.11.18 um 9:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 16 (4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & y > 0 \\ x \quad , & y = 0 \\ -\sqrt{x^2+y^2}, & y < 0. \end{cases}$$

Man zeige:

(i) f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

(ii) Jede Richtungsableitung von f existiert in $(0,0)$.

Aufgabe 17 (4 Punkte)
Die Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ erfülle $\partial_1 f = \partial_2 f$ und $f(0,0) = 0$. Man zeige, dass es ein $g \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gibt mit $f(x,y) = g(x,y)(x+y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 18 (4 Punkte)

(i) Es sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbarer Weg auf der Oberfläche einer euklidischen Kugel, d. h. es gelte $\|\gamma(t)\|_2 = r$ für alle $t \in [0,1]$ und ein $r > 0$. Zeigen Sie, dass bezüglich des euklidischen Skalarprodukts
$$\forall t \in [0,1] : \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$$
gilt.

(ii) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und
$$(\nabla f)(x) = h(x)x$$
für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und eine gewisse Abbildung $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass dann f auf Kugeloberflächen konstant ist, d. h., dass es eine Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass
$$\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \tilde{f}(\|x\|_2)$$
ist.

Aufgabe 19 (4 Punkte)
Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Hilbertraum und $a \in \mathcal{L}^2(H, \mathbb{R})$, wobei
$$\mathcal{L}^2(H,\mathbb{R}) := \{\varphi : H \times H \to \mathbb{R} \mid \forall x, y \in H : \varphi(x, \cdot), \varphi(\cdot, y) \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})\}$$
mit der Norm $\|\varphi\| := \inf\{\alpha \geq 0 \mid \forall x, y \in H : \|\varphi(x,y)\| \leq \alpha \|x\| \|y\|\}$, $\varphi \in \mathcal{L}^2(H, \mathbb{R})$ bezeichnet.

(i) Zeigen Sie, dass es genau ein $A \in \mathcal{L}(H)$ gibt mit
$$\forall x, y \in H : a(x,y) = \langle Ax, y \rangle.$$
Man nennt A den von a induzierten Operator.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\mathcal{L}^2(H, \mathbb{R}) \to \mathcal{L}(H), \quad a \mapsto A$$
ein isometrischer Isomorphismus ist.