Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2018/2019

Analysis 3
Übungsblatt 6

Abgabe und Besprechung am 21.11.18 um 9:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 20 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := (y - x^2)(y - 2x^2)$$

im Nullpunkt einen kritischen Punkt besitzt, jedoch kein lokales Minimum vorliegt. Zeigen Sie weiterhin, dass interessanterweise die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Ursprung ein lokales Minimum in $(0, 0)$ annimmt.

Aufgabe 21 (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass für $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \nabla(f \circ A)(x) = A^* \nabla f(Ax).$$

(A^* bezeichne den in Aufgabe 4 definierten adjungierten Operator.)

Aufgabe 22 (4 Punkte)
Es seien H ein reeller Hilbertraum, $A \in \mathcal{L}(H)$ und $a(x) := \langle Ax, x\rangle$ für $x \in H$.

(i) Bestimmen Sie die erste Ableitung $\partial a(x)$ von a im Punkt $x \in H$.

(ii) Die zweite Ableitung $\partial^2 a(x)$ in $x \in H$ sei definiert als $\partial^2 a(x) := \partial(\partial a)(x) \in \mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H))$. Bestimmen Sie $\partial^2 a(x)(z)$, $x, z \in H$.

(iii) Zeigen Sie, dass im Fall $H = \mathbb{R}^n$ gilt: $\partial a(x) = (A + A^*)x$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 23 (4 Punkte)
Es seien E, F Banachräume über $\mathbb{K}$. Eine Funktion $f : E \to F$ heißt *positiv homogen vom Grad* $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\forall t > 0\, \forall x \in E \setminus \{0\} : f(tx) = t^\alpha f(x).$$

(i) Zeigen Sie: Ist $f \in C^1(E, F)$ positiv homogen vom Grad 1, so gilt $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

(ii) Nun sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Beweisen Sie, dass f genau dann positiv homogen vom Grad α ist, wenn die *Eulersche Homogenitätsrelation*

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} : \langle \nabla f(x), x\rangle = \alpha f(x)$$

erfüllt ist.