Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2018/2019

Analysis 3
Übungsblatt 7

Abgabe und Besprechung am 28.11.18 um 9:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 24 (6 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $[a,b]$ ein Intervall. Die Funktion $f : U \times [a,b] \to \mathbb{C}$ habe folgende Eigenschaften:

(i) Für alle $x \in U$ ist $f(x,\cdot) : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig,

(ii) Für alle $t \in [a,b]$ ist $f(\cdot,t) : U \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar ,

(iii) Die Abbildung $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ ist stetig auf $U \times [a,b]$.

Beweisen Sie:

(i) Die Abbildung
$$F : U \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t,$$
ist stetig differenzierbar mit Ableitung
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Nun seien $\alpha, \beta \in C^1(U,[a,b])$ Funktionen von x. Dann ist die Abbildung
$$G : U \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$
differenzierbar und es gilt für die Ableitung
$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}(x) = f(x,\beta(x))\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x}(x) - f(x,\alpha(x))\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 25 (3 Punkte)
Es seien $E_1,\dots,E_m,F$ Banachräume, $m \geq 2$ und $\varphi \in \mathcal{L}(E_1,\dots,E_m;F)$. Zeigen Sie, dass $\varphi \in C^\infty(E_1 \times \dots \times E_m, F)$ mit $\partial^{m+1}\varphi = 0$ ist.

Aufgabe 26 (3 Punkte)
Es seien E,F Banachräume, $X \subseteq E$ offen und $f \in C^1(X,\mathcal{L}^m(E,F))$ erfülle $f(X) \subseteq \mathcal{L}^m_{\mathrm{sym}}(E,F)$. Zeigen Sie, dass $\partial f(x)h \in \mathcal{L}^m_{\mathrm{sym}}(E,F)$ für alle $x \in X$, $h \in E$ gilt.

Bemerkung: Dies ist die für den Beweis von Korollar VII.5.3 benötigte Aussage.

Aufgabe 27 (4 Punkte)
Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir erklären den (m-dimensionalen) *Laplace-Operator* Δ durch
$$\Delta : C^2(X,\mathbb{R}) \to C(X,\mathbb{R}), \quad \Delta u := \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u.$$

Weiterhin seien $f,g \in C^2(X,\mathbb{R})$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(i) $\Delta(fg) = g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + f\Delta g$,

(ii) $(\Delta u) \circ A = \Delta(u \circ A)$, falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal ist, d. h. $A^\top A = I_n$ erfüllt.