Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau Wintersemester 2018/2019

Analysis 3
Übungsblatt 8

Abgabe und Besprechung am 05.12.18 um 9:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 28 (4 Punkte)
Für $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ und $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ setzen wir

$$\Box u := \partial_t^2 u - \Delta_x u \quad \text{und}$$
$$(\partial_t - \Delta)u := \partial_t u - \Delta_x u,$$

wobei Δ_x den Laplaceoperator bezüglich $x \in \mathbb{R}^m$ bezeichnet. Man nennt $\Box$ *Wellen- oder D'Alembert-Operator* und $\partial_t - \Delta$ *Wärmeleitungsoperator*.

(i) Berechnen Sie $(\partial_t - \Delta)k$ in $(0, \infty) \times \mathbb{R}^m$ für
$$k(t, x) := t^{-m/2} \exp(-\|x\|^2/4t), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^m.$$

(ii) Es seien $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $c > 0$, sowie $v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\| = c$. Berechnen Sie $\Box w$ für
$$w(t, x) := g(\langle v, x\rangle - tc), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m.$$

Aufgabe 29 (4 Punkte)
Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $f \in C^2(X, \mathbb{R})$ führen wir die sogenannte *Hesse-Matrix*
$$H_f(x) := [\partial_j \partial_k f(x)]_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
ein.

(i) Zeigen Sie, dass
$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \langle f(x), x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)(x - x_0), x - x_0\rangle + o(\|x - x_0\|^2) \\ &=: T_2[f, x_0](x) + o(\|x - x_0\|^2) \end{aligned}$$
gilt.

(ii) Bestimmen Sie $T_2[f, (1, 1)]$ und $T_2[g, (0, 0, 0)]$ für
$$\begin{aligned} f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, &\qquad f(x, y) := (x - y)/(x + y), \\ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, &\qquad g(x, y, z) := x^2 + xy - 3y - z^2 + 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 30 (4 Punkte)
Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und E ein Banachraum. Wir definieren
$$BC^1(X, E) := \{u \in BC(X, E) \mid \partial_k u \in BC(X, E), k = 1, \ldots, m\}.$$
Zeigen Sie:

(i) $BC^1(X, E)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist im Allgemeinen kein Banachraum.

(ii) $BC^1(X, E)$ versehen mit der Norm $\|u\|_{1,\infty} := \max\{\|u\|_\infty, \|\partial_1 u\|_\infty, \ldots, \|\partial_m u\|_\infty\}$ für $u \in BC^1(X, E)$ ist ein Banachraum.

Aufgabe 31 (4 Punkte)
Klassifizieren Sie die kritischen Punkte der Funktion
$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$
nach Maxima, Minima und Sattelpunkten in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.