Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2018/2019

Analysis 3
Übungsblatt 9

Abgabe und Besprechung am 12.12.18 um 9:00 Uhr in C 113.

Es seien E und F Banachräume über $\mathbb{K}$, $X \subseteq E$, $Y \subseteq F$ offen sowie $q \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *C^q-Diffeomorphismus* (in Zeichen $f \in \operatorname{Diff}^q(X,Y)$, falls sie bijektiv ist $f \in C^q(X,Y)$, $f^{-1} \in C^q(Y,E)$ gilt. Eine Abbildung $g : X \to F$ heißt *lokaler C^q-Diffeomorphismus* (in Zeichen $g \in \operatorname{Diff}^q_{\text{loc}}(X,F)$), falls es zu jedem $x_0 \in X$ offene Umgebungen U von x_0 und V von $g(x_0)$ gibt, sodass $g|_U \in \operatorname{Diff}^q(U,V)$ ist.

Aufgabe 32 (4 Punkte)

Es seien $X \subseteq E$, $Y \subseteq F$ offen und $f \in \operatorname{Diff}^1_{\text{loc}}(X,Y)$. Dann gilt

$$\forall x_0 \in X : \partial f(x_0) \in \mathcal{L}_{\text{is}}(E,F) \quad \text{und} \quad \partial f^{-1}(y_0) = [\partial f(x_0)]^{-1},\ y_0 := f(x_0).$$

Aufgabe 33 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Abbildungen $Y := f(X)$ und entscheiden Sie, ob $f \in \operatorname{Diff}^q_{\text{loc}}(X,\mathbb{R}^2)$ oder $f \in \operatorname{Diff}^q(X,Y)$ für $q \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ gilt.

(i) $X := \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := (x+a, y+b)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

(ii) $X := \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := (x^2 - x - 2, 3y)$,

(iii) $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) := (x^2 - y^2, 2xy)$,

(iv) $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x\}$, $f(x,y) := (\log(xy), 1/(x^2+y^2))$.

Aufgabe 34 (4 Punkte)

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^1(X,\mathbb{R}^m)$. Ferner gebe es ein $\alpha > 0$ mit

$$\forall x,y \in X : |f(x) - f(y)| \geq \alpha |x-y|.$$

Zeigen Sie:

(i) $Y := f(X) \subseteq \mathbb{R}^m$ ist offen und $f \in \operatorname{Diff}^1(X,Y)$.

(ii) Ist $X = \mathbb{R}^m$, so ist $Y = \mathbb{R}^m$.

Aufgabe 35 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$x^2 + uy + \mathrm{e}^v = 0,$$
$$2x + u^2 - uv = 5$$

für vorgegebenes (x,y) aus einer Umgebung V von $(x_0,y_0) = (2,5)$ genau eine Lösung $(u(x,y), v(x,y))$ besitzt und dass die Zuordnung

$$g : V \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$$

stetig differenzierbar ist. Bestimmen Sie $g'(2,5)$.

Hinweis: Man bestimme zunächst auf einer Umgebung U von $(u_0,v_0) = (-1,0)$ die Funktion

$$f : U \to \mathbb{R}^2, \quad (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v)),$$

die zu vorgegebenem $(u,v) \in U$ die Lösung $(x(u,v), y(u,v))$ des Gleichungssystems liefert.