Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2018/2019

Analysis 3
Übungsblatt 10

Abgabe und Besprechung am 19.12.18 um 9:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 36 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1 = 0$$

in einer Umgebung von $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ nach $z = z(x, y)$ aufgelöst werden kann. Berechnen Sie $\partial z(1, 1)$ und $\partial^2 z(1, 1)$.

Aufgabe 37 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung u der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = (\alpha - \beta x(t))x(t), \quad \alpha, \beta > 0.$$

und untersuchen Sie $\lim_{t\to\infty} u(t)$ sowie die Wendepunkte von u.

Aufgabe 38 (4 Punkte)
Für E Banachraum, $D \subseteq E$ offen, $f \in C^{1-}(D, E)$ bezeichne $u : J(x^0) \to \mathbb{R}$ die nichtfortsetzbare Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x^0.$$

Bestimmen Sie $\mathcal{D}(f) := \{(t, x^0) \in \mathbb{R} \times D \mid t \in J(x^0)\}$ für

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{1+\alpha}$, $\alpha \geq 0$,

(ii) $f : E \to E$, $x \mapsto Ax$, $A \in \mathcal{L}(E)$,

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + x^2$,

(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto t^3x^2$.

Aufgabe 39 (4 Punkte)
Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $g \in C^{0,1-}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ mit

$$\forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n : \|g(t, x)\| \leq \gamma_1(t) + \gamma_2(t)\|x\|.$$

Zeigen Sie, dass für jede maximale Lösung $u : J \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t, x(t))$$

gilt: $\sup J = \infty$.

Hinweis: Gronwall-Lemma.