Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2018/2019

Analysis 3
Übungsblatt 11

Abgabe und Besprechung am 09.01.19 um 9:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 40 (4 Punkte)

(i) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f \in C(D, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

durch die Transformation $y := \frac{x}{t}$ äquivalent zu der Differenzialgleichung

$$\dot{y}(t) = \frac{f(y(t)) - y}{t}$$

ist.

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $\dot{x}(t) = (x^2 + tx + t^2)/t^2$.

Aufgabe 41 (4 Punkte)

Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ offen, $0 \in J$, E ein endlichdimensionaler Banachraum, $D \subseteq E$ offen, und $f \in C^{0,1-}(J \times D, E)$. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{D}(f) \to E, \quad (t, x^0) \mapsto u(t; x^0),$$

wobei $D(f)$ wie in Aufgabe 38 definiert sei und $u(\cdot; x^0)$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x^0$ bezeichne.

Zeigen Sie mithilfe des Gronwall-Lemmas, dass φ stetig in der zweiten Komponente ist (mit anderen Worten: Die Lösung hängt stetig vom Anfangswert ab).

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ offen, E ein endlichdimensionaler Banachraum, $D \subseteq E$ offen, und $f \in C^{0,1-}(J \times D, E)$ sei stetig differenzierbar bezüglich der zweiten Komponente. Mit $u(t; t_0, x^0) : J(t_0, x^0) \to E$ bezeichnen wir die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x^0$. Man kann zeigen, dass u stetig differenzierbar ist. Betrachten wir also die Ableitung

$$v(t) := \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0} u(t; t_0, x^0).$$

Zeigen Sie, dass v die eindeutige Lösung der linearen zeitvarianten Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \left[\tfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(t, u(t; t_0, x^0))\right] y(t), \quad y(t_0) = -f(t_0, x^0)$$

ist.

Aufgabe 43 (4 Punkte)

Für $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig und beschränkt betrachten wir die Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x$$

und die Lyapunov-Gleichung

$$\dot{P}(t) + A(t)^\top P(t) + P(t)A(t) = -I_n.$$

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Bedingungen:

(i) Die Differentialgleichung ist gleichmäßig exponentiell stabil, d. h.

$$\exists M, \lambda > 0\, \forall s \geq t \geq 0 : \|\Phi(s,t)\| \leq M\mathrm{e}^{-\lambda(s-t)},$$

wobei Φ die aus Aufgabe 10 bekannte Übergangsmatrix bezeichne.

(ii) Die Funktion

$$P(t) = \int_t^\infty \Phi(s,t)^\top \Phi(s,t)\,\mathrm{d}s$$

ist die eindeutige Lösung der Lyapunov-Gleichung, sie ist symmetrisch und erfüllt

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 > 0\, \forall t \geq 0 : \lambda_1\|x\|_2^2 \leq x^\top P(t)x \leq \lambda_2\|x\|_2^2.$$