Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2018/2019

Analysis 3
Übungsblatt 12

Abgabe und Besprechung am 16.01.19 um 9:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 44 (4 Punkte)
Gegeben sei der Innenproduktraum $(C([-\pi,\pi]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit $\langle g,h\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\overline{h(t)}\,\mathrm{d}t$ für $g,h \in C([-\pi,\pi])$.

(i) Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe von $f \in C([-\pi,\pi])$, $f(x) = x^2$. Folgern Sie aus der Fourierreihe von f

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(ii) Berechnen Sie die komplexe Fourierreihe von $f \in C([-\pi,\pi])$, $f(x) = |x|$. Folgern Sie aus der Fourierreihe von f

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Plotten Sie mit einem Programm Ihrer Wahl jeweils das erste, 5. und 10. Fourierpolynom sowie f in einem gemeinsamen Bild.

Aufgabe 45 (6 Punkte)
Es seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein (nicht notwendigerweise endlichdimensionaler) Hilbertraum und $U, V \subseteq H$ abgeschlossene Unterräume. Weiterhin seien $P_U : H \to H$ und $P_V : H \to H$ zwei Projektionen mit $\operatorname{im} P_U = U$ und $\operatorname{im} P_V = V$.

(i) Zeigen Sie: $x \in U \iff P_U x = x$.

(ii*) Es gilt $H = U \oplus U^\perp = V \oplus V^\perp$.

Der Beweis dieser Aussage ist ein freiwilliger Zusatz, für den bis zu zwei Bonuspunkte verdient werden können. Sie kann für die folgenden Aufgaben verwendet werden.

(iii) Zeigen Sie, dass $U^\perp := \{x \in H \mid \forall u \in U : \langle x,u\rangle = 0\}$ ein abgeschlossener Unterraum von H ist und

$$U \subseteq V \iff V^\perp \subseteq U^\perp$$

gilt.

(iv) Beweisen Sie: P_U ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn $\ker P_U = (\operatorname{im} P_U)^\perp$ gilt.

(v) Es seien P_U und P_V zusätzlich Orthogonalprojektionen. Zeigen Sie

$$U \subseteq V \iff P_U = P_U P_V = P_V P_U.$$

Aufgabe 46 (6 Punkte)

Es sei $S := \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum H. Zeigen Sie die Aquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) S ist *maximal*, d. h. ist T ein weiteres Orthonormalsystem und $S \subset T$, so ist $S = T$.

(ii) Ist $x \in H$ und $x \perp S$, so ist $x = 0$.

(iii) $\forall x, y \in H : \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x, e_k\rangle\langle e_k, y\rangle = \langle x, y\rangle$.

(iv) $\forall x \in H : \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2$.

(v) $\forall x \in H : \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x, e_k\rangle e_k = x$.

(vi) Es gilt $H = \overline{\operatorname{span} S}$.