Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2018/2019

Analysis 3
Übungsblatt 13

Abgabe und Besprechung am 23.01.19 um 9:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 47 (3 Punkte)
Für $f \in C_{2\pi}$ gelte $\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [0, 2\pi]$ gibt mit $f(\xi) = 0$. Stimmt dies auch, wenn nur $f \in C_{\mathrm{pw,n},2\pi}$ gilt?

Aufgabe 48 (3 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$D_n := \sqrt{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \mathsf{e}_k = 1 + 2\cos(\cdot) + 2\cos(2\cdot) + \cdots + 2\cos(n\cdot)$$

Dirichletscher Kern vom Grad n. Zeigen Sie

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\, \forall t \in \mathbb{R} : D_n(t) = \frac{\sin((n+1/2)\,t)}{\sin(t/2)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1.$$

Aufgabe 49 (3 Punkte)
Für $f, g \in C_{\mathrm{pw,n},2\pi}$ heißt

$$f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y$$

Faltung von f mit g. Man zeige:

(i) $f * g = g * f$,

(ii) Für $f, g \in C_{2\pi}$ gilt $f * g \in C_{2\pi}$,

(iii) $\forall m, n \in \mathbb{Z} : \mathsf{e}_m * \mathsf{e}_n = \delta_{mn}\mathsf{e}_n$.

Aufgabe 50 (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass für $f \in C_{\mathrm{pw,n},2\pi}$ gilt: $S_n f = D_n * f$.

Aufgabe 51 (3 Punkte)
Beweisen Sie die *allgemeine Parsevalsche Gleichung*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k}.$$