Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Sommersemester 2019

Analysis 4
Übungsblatt 1

Abgabe und Besprechung am 12.04.19 um 11:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $f \in \mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^n)$ und $(\alpha_{p\varepsilon})_{p\in\mathbb{Z}}$ die in der Vorlesung definierte Teilung der Eins. Weiterhin sei

$$f_\varepsilon := \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} f(p\varepsilon)\alpha_{p\varepsilon}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig gegen f konvergieren.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien $(a_k) \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}_0}$ mit $\lim_{k\to\infty}\|a_k\| = \infty$ und $(c_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$. Beweisen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \delta_{a_k}$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gegen eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ konvergiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,\mathrm{d}^n x = 1$$

und für $\varepsilon > 0$ sei $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\rho_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $T * \rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ im distributionellen Sinne für $\varepsilon \to 0$ gegen T konvergiert. Hierbei ist die Faltung $T * \rho_\varepsilon$ definiert als

$$T * \rho_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (T * \rho_\varepsilon)(x) := T[\check{\tau}_x \rho_\varepsilon],$$

wobei $\check{\tau}_x \rho_\varepsilon$ den Translationsoperator $(\check{\tau}_x \rho_\varepsilon)(y) := \rho_\varepsilon(x - y)$ bezeichnet.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass $\rho_\varepsilon * \varphi \xrightarrow[\mathcal{D}]{\varepsilon\to 0} \varphi$ für $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt.