Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Sommersemester 2019

Analysis 4
Übungsblatt 2

Abgabe und Besprechung am 26.04.19 um 11:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei $(f_k) \in (\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n))^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$, $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie $T_{f_k} \underset{\mathcal{D}'}{\longrightarrow} T_f$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Beweisen Sie: Für jeden linearen Differentialoperator in der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $(L^*)^* = L$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Es seien L_1, L_2, L_3, M lineare Differentialoperatoren in der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt $[L_1, L_2] := L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1$ *Kommutator*. Zeigen Sie:

(i) $[M, L_1 \circ L_2] = [M, L_1] \circ L_2 + L_1 \circ [M, L_2]$,

(ii) $[[L_1, L_2], L_3] + [[L_2, L_3], L_1] + [[L_3, L_1], L_2] = 0$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Distribution LT_f für

(i) $L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ und $f = \Theta$,

(ii) $L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \gamma\,\mathrm{id}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ und $f(x) = \Theta(x)\mathrm{e}^{-\gamma x}$,

wobei $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Sprungfunktion

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

bezeichnet.