Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau Sommersemester 2019

Analysis 4
Übungsblatt 3

Abgabe und Besprechung am 10.05.19 um 11:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Distribution LT_f für

(i) $L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ und $f = \Theta$,

(ii) $L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \gamma\,\mathrm{id}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ und $f(x) = \Theta(x)\mathrm{e}^{-\gamma x}$,

wobei $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Sprungfunktion

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

bezeichnet.

Definition: Für $T \in \mathcal{D}'$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ sei das Produkt $fT = Tf$ definiert als

$$(fT)[\varphi] := (Tf)[\varphi] := T[f\varphi].$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Zeigen Sie:

(i) Für $T \in \mathcal{D}'$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ gilt die Produktregel $(fT)' = f'T + fT'$.

(ii) Für $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ gilt $(f(t)\delta)^{(k)} = f(0)\delta^{(k)}$.

(iii) Für $(T_k) \in (\mathcal{D}')^{\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=0}^{n} T_k \xrightarrow[\mathcal{D}']{n\to\infty} S \in \mathcal{D}'$ gilt $\sum_{k=0}^{n} T_k' \xrightarrow[\mathcal{D}']{n\to\infty} S'$.

Aufgabe 9 (4 Punkte)
Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ und $c \in \mathbb{R}$ sei

$$T_{ij}(c) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto x' := T_{ij}(c)x$$

mit

$$x_k' := \begin{cases} x_k, & k \neq i \\ x_i + cx_j, & k = i. \end{cases}$$

(i) Konstruieren Sie eine kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathring{A} \neq \emptyset$, so dass $B := T_{ij}(c)(A)$ kongruent zu A ist, d. h. $B = \beta(A)$ mit einer Bewegung β.

(ii) Zeigen Sie: Jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit Determinante 1 ist Produkt von Abbildungen der Form $T_{ij}(c)$.