Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Sommersemester 2019

Analysis 4
Übungsblatt 4

Abgabe und Besprechung am 24.05.19 um 11:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Es sei $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(s + t) = g(s) + g(t)$ für $s, t \in (0, \infty)$. Zeigen Sie: Ist g wachsend oder beschränkt auf beschränkten Mengen, so gilt $g(s) = sg(1)$ für $s > 0$.

Aufgabe 11 (4 Punkte)
Es sei

$$S := \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g(s + t) = g(s) + g(t), s, t \in \mathbb{R}, \exists s_0 \in \mathbb{R} : g(s_0) \neq s_0 g(1)\}.$$

Zeigen Sie:

(i) Für jedes $g \in S$ is $\operatorname{graph}(g)$ dicht in $\mathbb{R}^2$.

(ii) $S \neq \emptyset$.

Hinweis: Nutzen Sie eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{R}$, um g zu definieren.

Aufgabe 12 (6 Punkte)
Es seien

$$C_0 := [0, 1], \quad C_1 := C_0 \setminus (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}), \quad C_2 := C_1 \setminus \left((\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}) \cup (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9})\right), \quad \ldots$$

Allgemein entsteht $C_n + 1$ aus C_n durch Weglassen der offenen mittleren Drittel aller $2n$ Intervalle, aus denen sich C_n zusammensetzt. Der Durchschnitt $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$ heißt *Cantorsches Diskontinuum*. Beweisen Sie

(i) C ist kompakt und hat ein leeres Inneres.

(ii) C besteht aus allen Zahlen in $[0, 1]$, welche eine Tertialbruchentwicklung $\sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}$ mit $a_k \in \{0, 2\}$ besitzen.

(iii) Jeder Punkt von C ist ein Häufungspunkt von C (d. h. C ist *perfekt*).

(iv) C hat Lebesgue-Maß 0.

(v) $C + C = [0, 2]$.