Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau
Sommersemester 2019

Analysis 4
Übungsblatt 5

Abgabe und Besprechung am 07.06.19 um 11:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 13 (4 Punkte)
Es sei C das aus Aufgabe 12 bekannte Cantorsche Diskontinuum. Zeigen Sie:

(i) Die Funktion

$$\varphi : C \to [0,1], \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \mapsto \varphi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-(k+1)}$$

ist wachsend, surjektiv und stetig.

(ii) C ist überabzählbar.

(iii) φ besitzt eine stetige Fortsetzung $f : [0,1] \to [0,1]$, die konstant ist auf den Intervallen, die $[0,1] \setminus C$ bilden. Die Funktion f heißt *Cantorfunktion* von C.

Aufgabe 14 (4 Punkte)
Es sei f die Cantorfunktion und C das Cantorsche Diskontinuum. beweisen Sie:

(i) Es gibt eine Lebesgue-Nullmenge N, sodass f in jedem Punkt von $[0,1] \setminus N$ differenzierbar ist und die Ableitung dort verschwindet.

(ii) Die Abbildung $g : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto x + f(x)$ ist topologisch.

(iii) $\lambda(g(C)) = 1$.

Aufgabe 15 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass es eine Lebesgue-messbare Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{R}$ gibt.

Hinweis: Betrachten Sie das maximale Element von

$$\{M \subset C \mid M \text{ ist linear unabhängig über } \mathbb{Q}\}.$$