Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau Sommersemester 2019

Analysis 4
Übungsblatt 6

Abgabe und Besprechung am 21.06.19 um 11:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 16 (4 Punkte)
Es sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge mit Jordan-Inhalt 0 und $g : N \to \mathbb{R}^m$ sei Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass im Fall $m \geq n$ die Menge $g(N)$ eine Menge im $\mathbb{R}^m$ mit Jordan-Inhalt 0 ist.

Ist die Aussage auch im Fall $m < n$ richtig?

Aufgabe 17 (4 Punkte)
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g : D \to \mathbb{R}^m$, $n \leq m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Zeigen Sie:

(i) Im Fall $n < m$ ist $g(D)$ eine Menge mit Lebesgue-Maß 0.

(ii) Ist $n = m$, $A \subseteq D$ kompakt sowie L die Lipschitz-Konstante der Einschränkung von g auf A, so gilt $\lambda_n(g(A)) \leq L^n \lambda_n(A)$, wobei λ_n das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$ bezeichne.

(iii) In (ii) kann Gleichheit auftreten.

Aufgabe 18 (4 Punkte)
Gegeben sei eine Folge (g_n) von stetigen Funktionen $g_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit

$$\operatorname{supp}(g_n) := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid g_n(x) \neq 0\}} \subseteq (n, n+1)$$

und $\int g_n \, \mathrm{d}\lambda = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Wir definieren

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y).$$

Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist und

$$\int \left(\int f(x, y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \neq \int \left(\int f(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 19 (4 Punkte)
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C([a, b], \mathbb{R}_{\geq 0}$ und

$$K := \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Zeigen Sie:

$$\operatorname{Vol}_3(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x.$$