Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Sommersemester 2019

Analysis 4
Übungsblatt 7

Abgabe am 05.07.19 um 11:00 Uhr in C 113, Besprechung am 09.07.19 um 09:00 Uhr in C 113.

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Masse und das Trägheitsmoment bzgl. der x-Achse von folgenden Körpern mit konstanter Dichte $m > 0$:

(i) $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq a, y^2 + z^2 \leq r^2\}$, $a, r > 0$,

(ii) $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}$, $a, b, c > 0$,

(iii) $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$, $0 < r < R$.

Aufgabe 21 (4 Punkte)

Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt und $m : K \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$M := \int_K m(x)\,\mathrm{d}^3x > 0.$$

Der *Schwerpunkt* $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ von K bzgl. der Dichte m ist definiert durch

$$s_i := \frac{1}{M} \int_K x_i m(x)\,\mathrm{d}^3x, \quad i = 1, 2, 3.$$

Sei $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Gerade durch den Schwerpunkt und L' eine zu L parallele Gerade im Abstand d. Seien Θ_L bzw. $\Theta_{L'}$ die Trägheitsmomente von K bzgl. dieser Achsen. Beweisen Sie den *Satz von Steiner*:

$$\Theta_{L'} = \Theta_L + Md^2.$$

Aufgabe 22 (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Theta : (0, \infty) \times (0, 1) \to (0, \infty)^2, \quad \Theta(s, t) := (s(1 - t), st)$$

bijektiv ist. Wie lautet die Umkehrabbildung? Berechnen Sie die Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante von Θ.

(ii) Wenden Sie auf das Integral

$$\int_{(0,\infty)^2} \mathrm{e}^{-x-y} x^{-1/2} y^{-1/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

die Koordinatentransformation Θ an und berechnen Sie es mittels des Satzes von Fubini.