Sommersemester 2015

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
PD Dr. Erhard Hexel
**Mathematik mit Maple für IN**

# Lösungen der Aufgaben aus Übungsserie 3

## Aufgabe 1:

> $restart : with(LinearAlgebra) :$

> $a := Vector([2,-1,-3]); b := Vector([-2,1,1]); c := Vector([-2,1,-3])$

$$a := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1)}$$

**a)**

> $v := 3 \cdot a + 5 \cdot b - c$

$$v := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2)}$$

> $Norm(v, 2)$

$$\sqrt{6} \quad \textbf{(1.3)}$$

**b)**

> $DotProduct(a, b);$

$$-8 \quad \textbf{(1.4)}$$

> $CrossProduct(a, b)$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.5)}$$

**c)**

ohne Anwendung des VectorAngle-Befehls:

> $a0 := Normalize(a, 2); b0 := Normalize(b, 2)$

$$a0 := \begin{bmatrix} \frac{1}{7}\sqrt{14} \\ -\frac{1}{14}\sqrt{14} \\ -\frac{3}{14}\sqrt{14} \end{bmatrix}$$

$$b0 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.6)}$$

> *phi1* := arccos(*DotProduct*(*a0*, *b0*))

$$\phi 1 := \pi - \arccos\left(\frac{2}{21}\sqrt{14}\sqrt{6}\right) \qquad \textbf{(1.7)}$$

> *evalf*(*phi1*)

$$2.631852976 \qquad \textbf{(1.8)}$$

> *convert*(*phi1*, *degrees*)

$$\frac{180\left(\pi - \arccos\left(\frac{2}{21}\sqrt{14}\sqrt{6}\right)\right) degrees}{\pi} \qquad \textbf{(1.9)}$$

> *evalf*(%)

$$150.7940678\ degrees \qquad \textbf{(1.10)}$$

unter Anwendung des **VectorAngle**-Befehls:

> *phi2* := *VectorAngle*(*a*, *b*)

$$\phi 2 := \pi - \arccos\left(\frac{2}{21}\sqrt{14}\sqrt{6}\right) \qquad \textbf{(1.11)}$$

**d)**

> *DotProduct*(*CrossProduct*(*a*, *b*), *c*)

$$0 \qquad \textbf{(1.12)}$$

Damit liegt der Vektor c in der von a und b aufgespannten Ebene, das heißt die Vektoren a,b und c sind linear abhängig.

Eine ONB der linearen Hülle [a,b,c]:

> *GramSchmidt*([*a*, *b*, *c*], *normalized*)

$$\left[\begin{bmatrix} \frac{1}{7}\sqrt{14} \\ -\frac{1}{14}\sqrt{14} \\ -\frac{3}{14}\sqrt{14} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{35}\sqrt{70} \\ \frac{3}{70}\sqrt{70} \\ -\frac{1}{14}\sqrt{70} \end{bmatrix}\right] \qquad \textbf{(1.13)}$$

## Aufgabe 2:

> $restart : with(LinearAlgebra) :$

> $A := Matrix(3, 3, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

> $B := Matrix(3, 3, [1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1])$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

**a)**

> $A + B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

> $3 \cdot Multiply(A, B)$

$$\begin{bmatrix} 3 & 15 & 12 \\ 12 & 33 & 30 \\ 21 & 51 & 48 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

> $C := Transpose(Multiply(A, B))$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 5 & 11 & 17 \\ 4 & 10 & 16 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

> $Multiply(MatrixInverse(B), A)$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

**b)**

> $Rank(C)$

$$2 \quad (2.7)$$

> $Determinant(C)$

$$0 \quad (2.8)$$

## Aufgabe 3:

> $restart : with(LinearAlgebra) :$

**a)**

> $A := \lambda \rightarrow Matrix([[2, 1, 1], [-2\cdot\lambda, \lambda, 9], [2, 2, \lambda]])$

$$A := \lambda \rightarrow Matrix([[2, 1, 1], [-2\,\lambda, \lambda, 9], [2, 2, \lambda]]) \quad (3.1)$$

> $'A(\lambda)' = A(\lambda)$

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2\,\lambda & \lambda & 9 \\ 2 & 2 & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

> $L := \{solve(Determinant(A(\lambda)), \lambda)\}$

$$L := \left\{3, -\frac{3}{2}\right\} \quad (3.3)$$

**b)**

Aus **a)** folgt bereits, dass das LGS eine eindeutig bestimmte Lösung hat für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus L$.

> $b := Vector([0, 6, 1])$

$$b := \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

> $Rank(A(L[1])); Rank(Matrix([A(L[1]), b]))$

$$2$$
$$2 \quad (3.5)$$

> $Rank(A(L[2])); Rank(Matrix([A(L[2]), b]))$

$$2$$
$$3 \quad (3.6)$$

Folglich hat das LGS unendlich viele Lösungen für $\lambda=3$ und keine Lösung für $\lambda=-\frac{3}{2}$.

**c)**

> $LinearSolve(A(1), b)$

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{10} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

# Aufgabe 4:

> $restart : with(LinearAlgebra) :$

> $u := Vector([1, 1, 1, 1])$

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

> $v := Vector([1, 2, 0, 1])$

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

> $w := Vector([1, 3, 1, 1])$

$$w := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

> $r := Vector([2, 1, 1, 2])$

$$r := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

**a)**

> $A := Matrix([v, w])$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

> $AT := Transpose(A)$      *# transponierte Matrix*

$$AT := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Eine Basis des orthogonalen Komplementes von U erhält man etwa durch Lösung des LGS AT·x=0:

> $L := LinearSolve(AT, Vector(2), free='t')$

$$L := \begin{bmatrix} 2\,t_3 - t_4 \\ -t_3 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

> $F := unapply(L, t_3, t_4) :$

> $B := \{F(1, 0), F(0, 1)\}$

**(4.8)**

$$B := \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \tag{4.8}$$

Einfacher kommt man durch Anwendung des **NullSpace**-Befehls zu einer solchen Basis:

> $NullSpace(AT)$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \tag{4.9}$$

**b)**

> $x := LinearSolve(Multiply(AT, A), Multiply(AT, r - u))$

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

> $rf := u + Multiply(A, x)$      *# Koordinatenvektor des Fußpunktes*

$$rf := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

**c)**

> $'d(r, \Gamma)' = Norm(r - rf, 2)$

$$d(r, \Gamma) = 1 \tag{4.12}$$

# Aufgabe 5:

> $restart : with(LinearAlgebra) :$

> $P1 := Vector([-5, 3]);\ P2 := Vector([-2, -1]);\ P3 := Vector([1, -5]);\ P4 := Vector([2, 2]);\ P5 := Vector([3, -1])$

$$P1 := \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$P2 := \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$P4 := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P5 := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

**a)**

> $A := Transpose(Matrix([[P1(1), P2(1), P3(1), P4(1), P5(1)], [1, 1, 1, 1, 1]]))$

$$A := \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

> $v := Vector([P1(2), P2(2), P3(2), P4(2), P5(2)])$

$$v := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

> $B := Multiply(Transpose(A), A)$

$$B := \begin{bmatrix} 43 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

> $w := Multiply(Transpose(A), v)$

$$w := \begin{bmatrix} -17 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

> $z := LinearSolve(B, w)$

$$z := \begin{bmatrix} -\frac{87}{214} \\ -\frac{103}{214} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

> $f := x \rightarrow DotProduct(z, Vector([x, 1]))$

$$f := x \rightarrow LinearAlgebra\text{:-}DotProduct(z, Vector([x, 1])) \tag{5.7}$$

> $'f(x)' = f(x)$

$$f(x) = -\frac{103}{214} - \frac{87}{214}\, x \tag{5.8}$$

**b)**

> $with(plots):$

> $G1 := pointplot([P1, P2, P3, P4, P5], symbol = circle, color = blue):$

> $G2 := plot(f(x), x = -5 .. 3, color = red):$

> $display(\{G1, G2\})$