Sommersemester 2015

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
PD Dr. Erhard Hexel
Mathematik mit Maple für IN

Lösungen der Aufgaben aus Übungsserie 4

Aufgabe 1:

> $restart : with(LinearAlgebra) :$

> $F := (x, y, z) \rightarrow Vector([x+y, 2\cdot x-y, x+y+z]); G := (x, y, z) \rightarrow Vector([z+y-x, z-2\cdot y, x-3\cdot y])$

$$F := (x, y, z) \rightarrow Vector([x+y, 2x-y, x+y+z])$$
$$G := (x, y, z) \rightarrow Vector([z+y-x, z-2y, x-3y]) \quad (1.1)$$

> $'F(x, y, z)' = F(x, y, z)$

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x-y \\ x+y+z \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

> $'G(x, y, z)' = G(x, y, z)$

$$G(x, y, z) = \begin{bmatrix} z+y-x \\ z-2y \\ x-3y \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

a)

Bestimmung der Matrix A mit F(x,y,z)=A$\cdot (x, y, z)^T$:

> $A := Matrix([F(1, 0, 0), F(0, 1, 0), F(0, 0, 1)])$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Bestimmung der Matrix B mit G(x,y,z)=B$\cdot (x, y, z)^T$:

> $B := Matrix([G(1, 0, 0), G(0, 1, 0), G(0, 0, 1)])$

$$B := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Bestimmung der Matrix C mit G∘F(x,y,z)=C$\cdot (x, y, z)^T$ mit C=B$\cdot$A:

> $C := Multiply(B, A)$

(1.6)

$$C := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

b)

> $Rank(A); Rank(B)$

$$3$$
$$2 \tag{1.7}$$

Folglich hat nur F hat eine Umkehrabbildung FU und es gilt:

> $v := Vector([x, y, z])$

$$v := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

> $'FU(x, y, x)' = convert(Multiply(MatrixInverse(A), v), list)$

$$FU(x, y, x) = \left[\frac{1}{3}\,x + \frac{1}{3}\,y,\ \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y,\ -x + z\right] \tag{1.9}$$

Aufgabe 2:

> $restart : with(LinearAlgebra) :$

a)

> $a := Vector([1, 2, -1]); b := Vector([0, -2, 3])$

$$a := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

> $axb := CrossProduct(a, b)$

$$axb := \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Die Bilder von a,b und axb unter L:

> $La := a; Lb := b; Laxb := -axb$

$$La := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Lb := \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Laxb := \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

b)

> $A := Matrix([La, Lb, Laxb])$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

> $B := Matrix([a, b, axb])$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

Matrix M mit L(x,y,z)=M$\cdot (x, y, z)^T$:

> $M := Multiply(A, MatrixInverse(B))$

$$M := \begin{bmatrix} -\frac{3}{29} & \frac{24}{29} & \frac{16}{29} \\ \frac{24}{29} & \frac{11}{29} & -\frac{12}{29} \\ \frac{16}{29} & -\frac{12}{29} & \frac{21}{29} \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

c)

> $v := Vector([-5, -7, 3])$

$$v := \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (2.7)$$

> $Lv := Multiply(M, v)$

$$Lv := \begin{bmatrix} -\frac{105}{29} \\ -\frac{233}{29} \\ \frac{67}{29} \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

> $d := \frac{Norm(Lv - v, 2)}{2}$

$$d := \frac{5}{29}\sqrt{29} \tag{2.9}$$

Aufgabe 3:

> $restart : with(LinearAlgebra) :$

> $A := Matrix(3, 3, [1, -2, 5, -2, 3, 0, 5, 0, 2])$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

> $L := Eigenvectors(A)$

$$L := \begin{bmatrix} 7 \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5} \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

$$\left[\left[1, \frac{9\left(-\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)}{\left(-\frac{15}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)\left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)}, \frac{9\left(-\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)}{\left(-\frac{15}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)\left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)}\right],\right.$$

$$\left[-\frac{1}{2}, -\frac{2\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)}{-\frac{15}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}}, -\frac{2\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)}{-\frac{15}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5}}\right],$$

$$\left.\left[1, 1, 1\right]\right]$$

Die normierten Eigenvektoren:

> $v1 := simplify(Normalize(Column(L[2], 1), 2)); v2 := simplify(Normalize(Column(L[2], 2), 2)); v3 := simplify(Normalize(Column(L[2], 3), 2))$

$$v1 := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\,\frac{-7+3\sqrt{5}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \\ \frac{2}{3\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \\ -\frac{1}{12}\,\frac{\left(-5+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \end{bmatrix}$$

$$v3 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\,\frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \\ \frac{1}{12}\,\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

> $T := Matrix([v1, v2, v3])$

$$T := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\,\frac{-7+3\sqrt{5}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} & -\frac{1}{6}\,\frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5-2\sqrt{5}}} & -\frac{2}{3\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{12}\,\frac{\left(-5+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} & \frac{1}{12}\,\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

T ist orthogonal:

> $simplify(Transpose(T) \cdot T)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Die gesuchte Diagonalmatrix:

> $simplify(Transpose(T) \cdot A \cdot T)$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\,\frac{-35+17\sqrt{5}}{-5+2\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\,\frac{35+17\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Aufgabe 4:

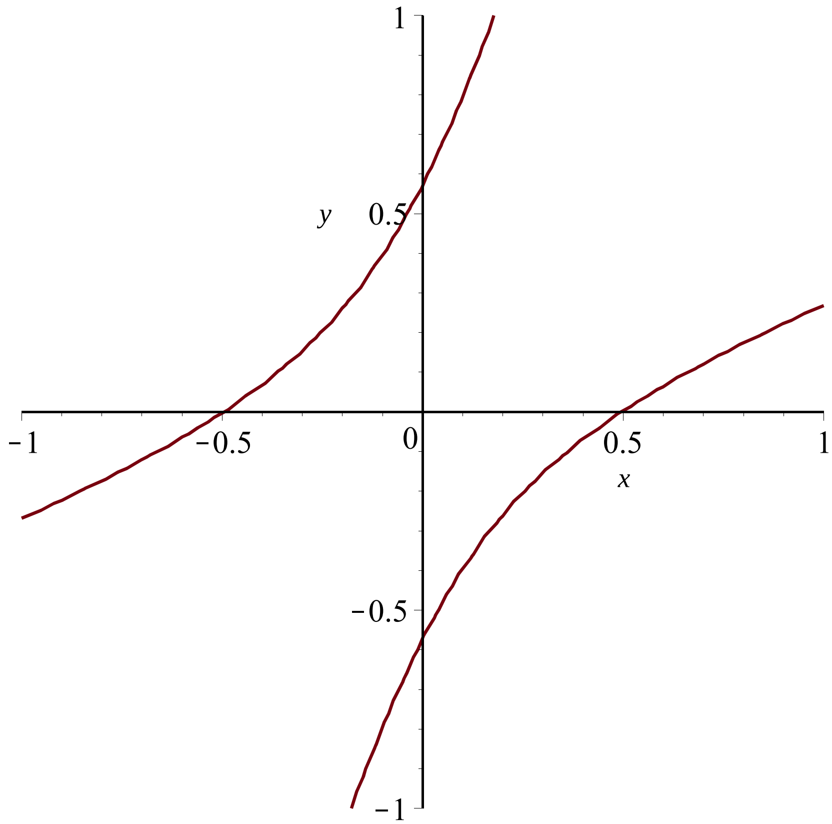
a)

> $restart : with(LinearAlgebra) : with(plots) :$

> $F := (x, y) \to 4 \cdot x^2 - 12 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2$

$$F := (x, y) \to 4\,x^2 - 12\,x\,y + 3\,y^2 \tag{4.1}$$

> $implicitplot(F(x, y) = 1, x = -1\,..1, y = -1\,..1)$



Matrixdarstellung der quadratischen Form F(x,y):

> $A := Matrix([[4, -6], [-6, 3]])$

(4.2)

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.2)}$$

> $z := Vector(([x, y]))$

$$z := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.3)}$$

> $'F(x, y)' = simplify(Transpose(z) \cdot A \cdot z)$

$$F(x, y) = 4\,x^2 - 12\,x\,y + 3\,y^2 \qquad \textbf{(4.4)}$$

Eigenvektoren der symmetrischen Matrix A:

> $L := Eigenvectors(A)$

$$L := \begin{bmatrix} \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{145} \\ \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{145} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{6}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{145}} & -\frac{6}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{145}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.5)}$$

> $z1 := Column(L[2], 1);\ z2 := Column(L[2], 2)$

$$z1 := \begin{bmatrix} -\frac{6}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{145}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z2 := \begin{bmatrix} -\frac{6}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{145}} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.6)}$$

Transformationsmatrix:

> $T := simplify(Matrix([Normalize(z1, 2), Normalize(z2, 2)]))$

$$T := \begin{bmatrix} -\frac{12}{\sqrt{290 - 2\sqrt{145}}} & \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{145 + \sqrt{145}}} \\ \frac{-1 + \sqrt{145}}{\sqrt{290 - 2\sqrt{145}}} & \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{145}\right)}{\sqrt{145 + \sqrt{145}}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.7)}$$

Die aus den Eigenwerten von A bestehende Diagonalmatrix DA:

> $DA := DiagonalMatrix(L[1])$

$$DA := \begin{bmatrix} \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{145} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{145} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.8)}$$

Die in das u-v-Koordinatensystem transformierte quadratische Gleichung F(x,y)=1:

> $w := Vector([u, v])$

(4.9)

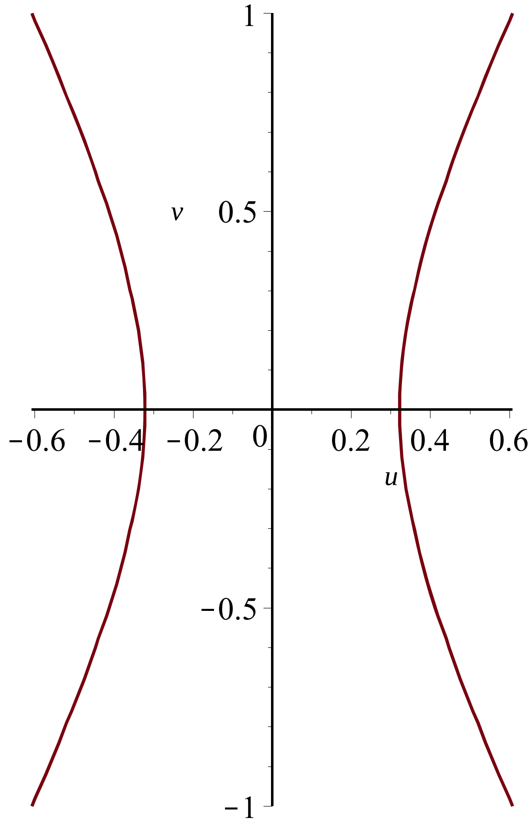
$$w := \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

> $G := Transpose(w) \cdot DA \cdot w = 1$

$$G := u^2 \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{145}\right) + v^2 \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{145}\right) = 1 \tag{4.10}$$

Graphische Darstellung der Kurve von G im u-v-Koordinatensystem:

> $implicitplot(G, u = -1..1, v = -1..1, scaling = CONSTRAINED)$



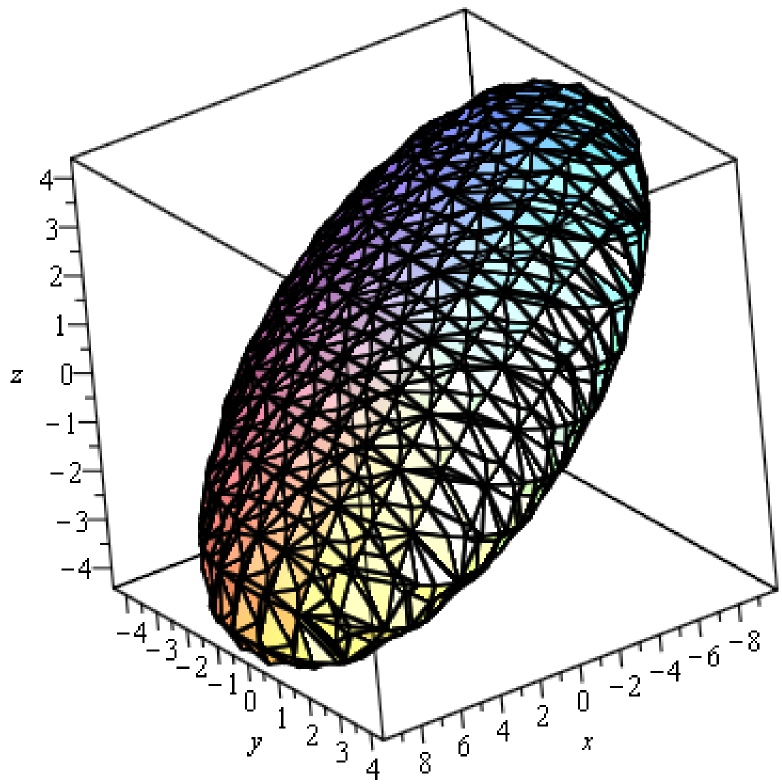
b)

> $restart : with(LinearAlgebra) : with(plots) :$

> $F := (x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 + 5 \cdot z^2 + 4 \cdot x \cdot z$

$$F := (x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 + 5\,z^2 + 4\,x\,z \tag{4.11}$$

> $implicitplot3d(F(x, y, z) = 20, x = -10..10, y = -10..10, z = -10..10, axes = BOXED, numpoints = 10000)$



Matrixdarstellung der quadratischen Form F(x,y,z):

> $A := Matrix(3, 3, [1, 0, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 5])$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{(4.12)}$$

> $s := Vector([x, y, z])$

$$s := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \mathbf{(4.13)}$$

> $'F(x, y, z)' = simplify(Transpose(s) \cdot A \cdot s)$

$$F(x, y, z) = x^2 + 4\,x\,z + y^2 + 5\,z^2 \quad \mathbf{(4.14)}$$

Eigenvektoren der symmetrischen Matrix A:

> $L := Eigenvectors(A)$

(4.15)

$$L := \left[\begin{array}{c} 3+2\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \\ 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc} \frac{2}{2+2\sqrt{2}} & \frac{2}{2-2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \tag{4.15}$$

> $s1 := Column(L[2], 1); s2 := Column(L[2], 2); s3 := Column(L[2], 3)$

$$s1 := \left[\begin{array}{c} \frac{2}{2+2\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]$$

$$s2 := \left[\begin{array}{c} \frac{2}{2-2\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]$$

$$s3 := \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right] \tag{4.16}$$

Transformationsmatrix:

> $T := simplify(Matrix([Normalize(s1, 2), Normalize(s2, 2), Normalize(s3, 2)]))$

$$T := \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} & -\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & 0 \end{array}\right] \tag{4.17}$$

Die aus den Eigenwerten von A bestehende Diagonalmatrix DA:

> $DA := DiagonalMatrix(L[1])$

$$DA := \left[\begin{array}{ccc} 3+2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{4.18}$$

Die in das u-v-w-Koordinatensystem transformierte quadratische Gleichung F(x,y,z)=20:

> $t := Vector([u, v, w])$

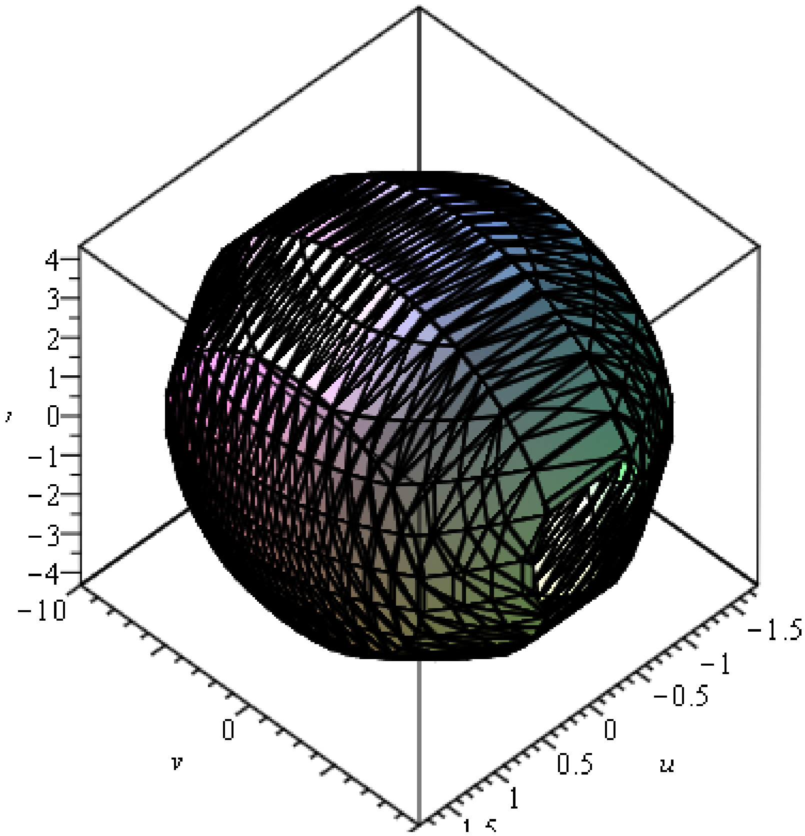
$$t := \left[\begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array}\right] \tag{4.19}$$

> $G := simplify(Transpose(t) \cdot DA \cdot t) = 20$

$$G := 2\,u^2\sqrt{2} - 2\,v^2\sqrt{2} + 3\,u^2 + 3\,v^2 + w^2 = 20 \qquad \textbf{(4.20)}$$

Graphische Darstellung der Kurve von G im u-v-w-Koordinatensystem:

> $implicitplot3d(G, u=-10..10, v=-10..10, w=-10..10, axes=BOXED, numpoints=10000)$



Aufgabe 5:

> $restart$

> $with(LinearAlgebra):$

Berechnung der Matrix M und des Vektors b für die Spiegelung

F(x)=M·x+b

an der Geraden Γ=r0+[a]:

> $r0 := Vector([-7, 5]);\ a := Vector([17, -23])$

$$r0 := \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$a := \begin{bmatrix} 17 \\ -23 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5.1)}$$

Wählen mit c einen zu a orthogonalen Vektor:

> $c := Vector([23, 17])$

$$c := \begin{bmatrix} 23 \\ 17 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

> $DotProduct(a, c)$ # a und c sind orthogonal

$$0 \tag{5.3}$$

> $M := Multiply(Matrix([a, -c]), MatrixInverse(Matrix([a, c])))$

$$M := \begin{bmatrix} -\frac{120}{409} & -\frac{391}{409} \\ -\frac{391}{409} & \frac{120}{409} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

> $b := r0 - Multiply(M, r0)$

$$b := \begin{bmatrix} -\frac{1748}{409} \\ -\frac{1292}{409} \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Bestimmung von y= F(x) und d(x,Γ):

> $x := Vector([11, 8])$

$$x := \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

> $y := Multiply(M, x) + b$

$$y := \begin{bmatrix} -\frac{6196}{409} \\ -\frac{4633}{409} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

> $'d(x, \Gamma)' = VectorNorm\left(\frac{(x - y)}{2}, 2\right)$

$$d(x, \Gamma) = \frac{465}{818}\sqrt{818} \tag{5.8}$$