Sommersemester 2015

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
PD Dr. Erhard Hexel
Mathematik mit Maple für IN

Lösungen der Aufgaben aus Übungsserie 5

Aufgabe 1:

> *restart*

> $f := x \to \frac{x^4 - 8 \cdot x^2 + 16}{(x^2 - 3 \cdot x - 10) \cdot (x+1)} : 'f(x)' = f(x)$

$$f(x) = \frac{x^4 - 8\,x^2 + 16}{(x^2 - 3\,x - 10)\,(x+1)} \quad \textbf{(1.1)}$$

Die Nullstellen von f(x):

> $solve(f(x) = 0, x)$

$$2, 2 \quad \textbf{(1.2)}$$

Die Unstetigkeitsstellen von f(x):, das sind die Nullstellen des Nennerpolynoms:

> $discont(f(x), x)$

$$\{-2, -1, 5\} \quad \textbf{(1.3)}$$

Das sind die Nullstellen des Nennerpolynoms:

> $q := x \to denom(f(x)) :'q(x)' = q(x)$

$$q(x) = (x^2 - 3\,x - 10)\,(x+1) \quad \textbf{(1.4)}$$

> $solve(q(x) = 0, x)$

$$-1, 5, -2 \quad \textbf{(1.5)}$$

Das Verhalten von f(x) in einer Umgebung der Unstetigkeitsstellen:

> $Limit('f(x)', x = -2) = limit(f(x), x = -2)$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 0 \quad \textbf{(1.6)}$$

> $Limit('f(x)', x = -1) = limit(f(x), x = -1)$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = undefined \quad \textbf{(1.7)}$$

> $Limit('f(x)', x = 5) = limit(f(x), x = 5)$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = undefined \quad \textbf{(1.8)}$$

Damit hat f(x) bei x=-2 eine hebbare Unstetigkeitsstelle, nicht aber bei x=-1 und x=5.

> $Limit('f(x)', x = -1, left) = limit(f(x), x = -1, left)$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \infty \quad \textbf{(1.9)}$$

> $Limit('f(x)', x = -1, right) = limit(f(x), x = -1, right)$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \quad \textbf{(1.10)}$$

> $Limit('f(x)', x = 5, left) = limit(f(x), x = 5, left)$

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = -\infty \quad \textbf{(1.11)}$$

> $Limit('f(x)', x=5, right) = limit(f(x), x=5, right)$

$$\lim_{x \to 5+} f(x) = \infty \tag{1.12}$$

Folglich sind x=-1 und x=5 Polstellen von f(x).
Das Verhalten von f(x) im Unendlichen:

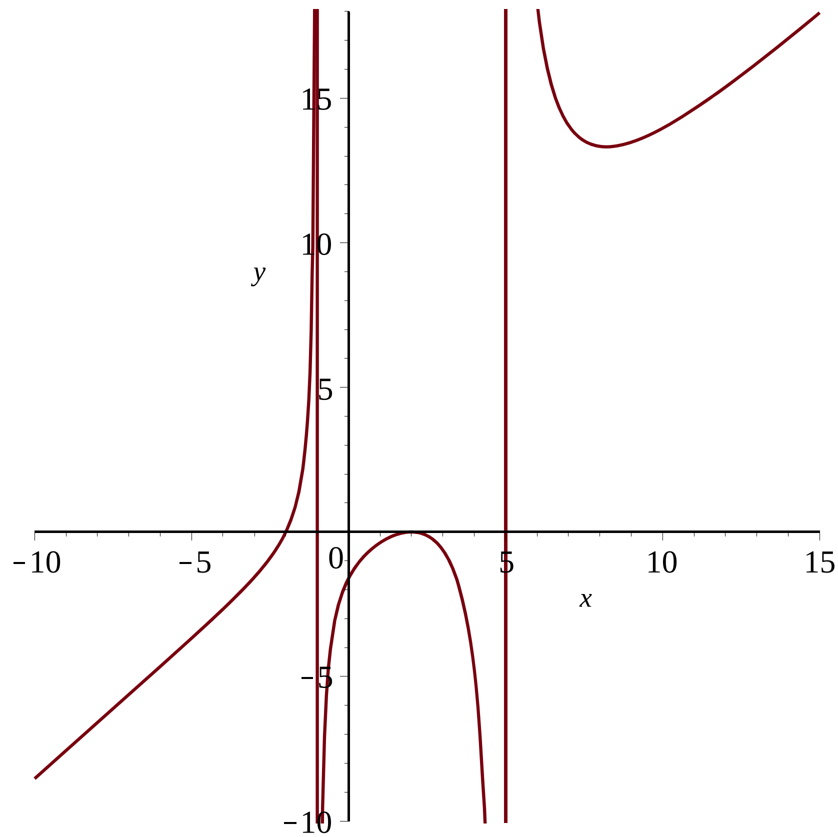
> $Limit('f(x)', x=infinity) = limit(f(x), x=infinity)$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \tag{1.13}$$

> $Limit('f(x)', x=-infinity) = limit(f(x), x=-infinity)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \tag{1.14}$$

> $plot(f(x), x=-10..15, y=-10..18)$



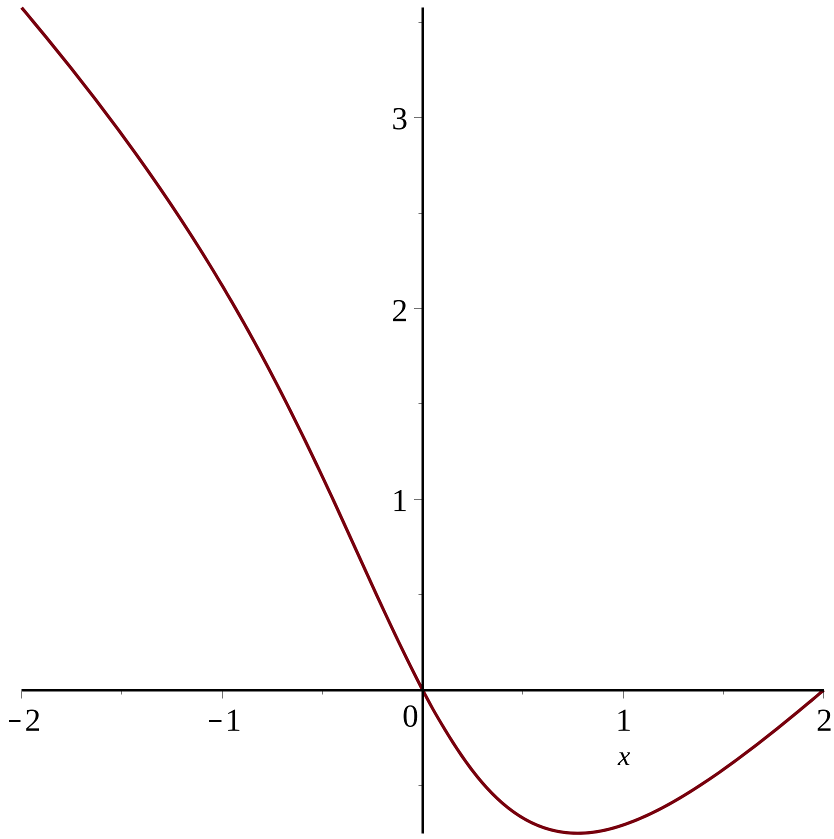
Aufgabe 2:

> $restart$

> $f := x \to \frac{x^2 - 2 \cdot x}{\mathrm{sqrt}(x^2+1)}$

$$f := x \to \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2+1}} \tag{2.1}$$

> $plot(f(x), x=-2..2)$



a)

> $N := solve(f(x) = 0, x)$ *# die Nullstellen von f(x)*

$$N := 0, 2 \tag{2.2}$$

> $maximize(f(x), x=-2..2, location)$ *# globales Maximum und Maximalstelle*

$$\frac{8}{5}\sqrt{5}, \left\{\left[\{x=-2\}, \frac{8}{5}\sqrt{5}\right]\right\} \tag{2.3}$$

> $minimize(f(x), x=-2..2, location)$ *# globales Minimum und Minimalstelle*

$$\frac{\frac{1}{9}\frac{\left(\left(27+3\sqrt{105}\right)^{2/3}-6\right)^2}{\left(27+3\sqrt{105}\right)^{2/3}} - \frac{2}{3}\frac{\left(27+3\sqrt{105}\right)^{2/3}-6}{\left(27+3\sqrt{105}\right)^{1/3}}}{\sqrt{\frac{1}{9}\frac{\left(\left(27+3\sqrt{105}\right)^{2/3}-6\right)^2}{\left(27+3\sqrt{105}\right)^{2/3}}+1}}, \left\{\left[\left\{x\right.\right.\right. \tag{2.4}$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{\left(27+3\sqrt{105}\right)^{2/3}-6}{\left(27+3\sqrt{105}\right)^{1/3}}\Bigg\},$$

$$\left.\left.\frac{\frac{1}{9}\,\frac{\left(\left(27+3\sqrt{105}\right)^{2/3}-6\right)^{2}}{\left(27+3\sqrt{105}\right)^{2/3}}-\frac{2}{3}\,\frac{\left(27+3\sqrt{105}\right)^{2/3}-6}{\left(27+3\sqrt{105}\right)^{1/3}}}{\sqrt{\frac{1}{9}\,\frac{\left(\left(27+3\sqrt{105}\right)^{2/3}-6\right)^{2}}{\left(27+3\sqrt{105}\right)^{2/3}}+1}}\right]\right\}$$

> $evalf(\%)$

$$-0.7504159186,\ \{[\{x=0.7709169969\},\ -0.7504159186]\} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Bestimmung der Wendepunkte von f(x) im Intervall [-2,2]:

> $W := solve((D@@2)(f)(x)=0, x)$

$$W := 3-\sqrt{11},\ 3+\sqrt{11} \qquad \textbf{(2.6)}$$

Überprüfung der hinreichenden Bedingung:

> $is((D@@3)(f)(W[1]) \neq 0)$

$$true \qquad \textbf{(2.7)}$$

> $is((D@@3)(f)(W[2]) \neq 0)$

$$true \qquad \textbf{(2.8)}$$

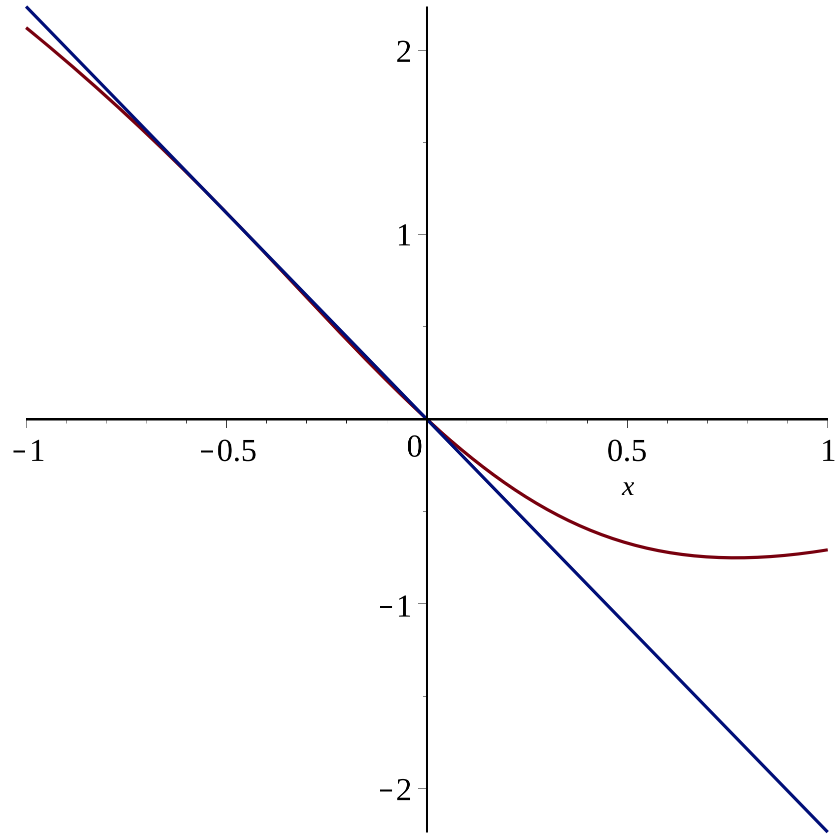
b)

> $T := x \rightarrow D(f)(-0.5)\cdot(x+0.5)+f(-0.5) : 'T(x)' = T(x)$
> *# Gleichung der Tangente bei x=-0.5*

$$T(x) = -2.236067977\,x \qquad \textbf{(2.9)}$$

> $with :$

> $plot([f(x), T(x)], x=-1..1)$



Aufgabe 3:

> *restart*

> *Taylor* := **proc**(*f*, *k*, *x0*) **local** *t*; *t* := *taylor*(*f*(*x*), *x* = *x0*, *k* + 1); **return**(*convert*(*t*, *polynom*)) **end proc**

```
Taylor := proc(f, k, x0)
    local t;
    t := taylor(f(x), x = x0, k + 1); return convert(t, polynom)
end proc
```
(3.1)

> $f := x \to \frac{1}{1+x^2}$

$$f := x \to \frac{1}{1+x^2} \qquad \textbf{(3.2)}$$

> *T* := *seq*(*unapply*(*Taylor*(*f*, *k*, 1), *x*), *k* = 1 ..4) :

> 'T[1](x)'= T[1](x); 'T[2](x)'= T[2](x); 'T[3](x)'= T[3](x); 'T[4](x)'= T[4](x);

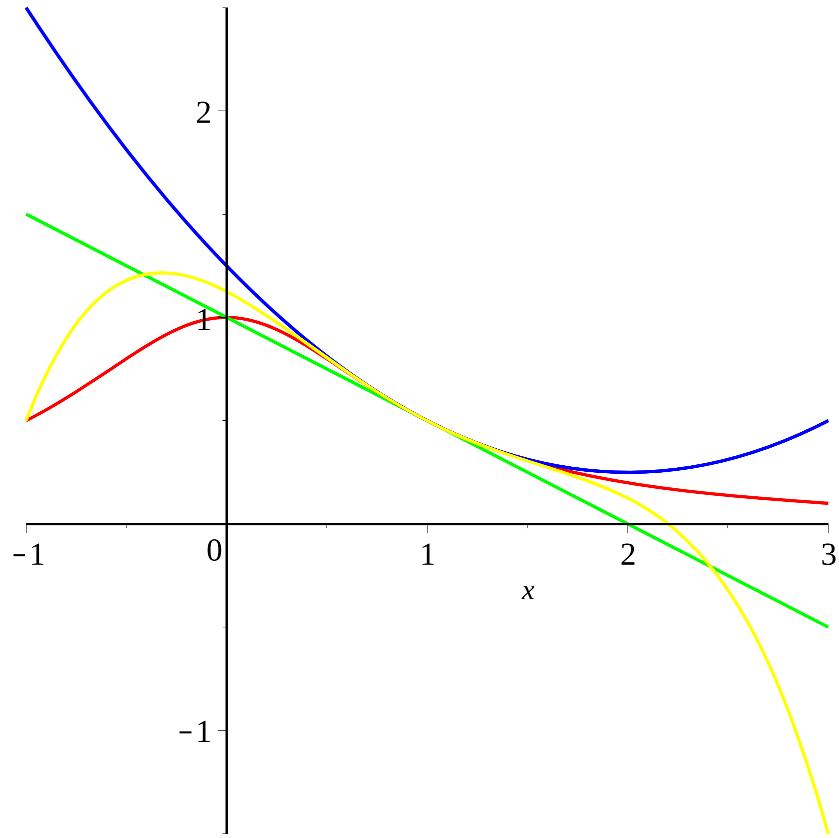
$$T_1(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x$$

$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\,(x-1)^2$$

$$T_3(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\,(x-1)^2$$

$$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\,(x-1)^2 - \frac{1}{8}\,(x-1)^4 \tag{3.3}$$

> *plot*([*f*(*x*), *T*[1](*x*), *T*[2](*x*), *T*[3](*x*), *T*[4](*x*)], *x* = −1 ..3, *color* = [*red*, *green*, *blue*, *blue*, *yellow*])



Aufgabe 4:

> *restart*

> $a := k \to \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^k}{k}$: *Sum*(*a*(*k*), *k* = 1 ..*infinity*)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\,x\right)^k}{k} \tag{4.1}$$

Anwendung des Quotientenkriteriums:

> $q := simplify\left(\frac{a(k+1)}{a(k)}\right)$

$$q := \frac{1}{3}\,\frac{x\,k}{k+1} \qquad \textbf{(4.2)}$$

> $gw := limit(\mathrm{abs}(q), k = infinity)$

$$gw := \frac{1}{3}\,|x| \qquad \textbf{(4.3)}$$

> $solve(gw < 1, x)$

$$RealRange(Open(-3), Open(3)) \qquad \textbf{(4.4)}$$

Überprüfung der Reihe auf Konvergenz in den Randpunkten des Intervalls (-3,3):

> $seq(Sum(a(k), k = 1..infinity) = sum(a(k), k = 1..infinity), x = \{-3, 3\})$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2), \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \qquad \textbf{(4.5)}$$

Folglich ist I=[-3,3) das Konvergenzintervall der Funktion f(x).

Aufgabe 5:

> *restart*

> $Integral := \textbf{proc}(f, x, a, b)\ Int(f(x), x = a..b) = int(f(x), x = a..b)\ \textbf{end proc}$

$$Integral := \textbf{proc}(f, x, a, b)\ Int(f(x), x = a..b) = int(f(x), x = a..b)\ \textbf{end proc} \qquad \textbf{(5.1)}$$

a)

> $g := t \rightarrow \frac{t \cdot \exp(t)}{(t+1)^2}$

$$g := t \rightarrow \frac{t\,e^t}{(t+1)^2} \qquad \textbf{(5.2)}$$

> $Integral(g, t, 0, 1)$

$$\int_0^1 \frac{t\,e^t}{(t+1)^2}\,dt = -1 + \frac{1}{2}\,e \qquad \textbf{(5.3)}$$

b)

> $h := x \rightarrow x \cdot \exp(-x^2)$

$$h := x \rightarrow x\,e^{-x^2} \qquad \textbf{(5.4)}$$

> $Integral(h, x, -infinity, infinity)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-x^2}\,dx = 0 \qquad \textbf{(5.5)}$$