Sommersemester 2015

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
PD Dr. Erhard Hexel
Mathematik mit Maple für IN

Übungsserie 1

Einführung in Maple

Maple (**ma**thematical mani**p**ulation **l**anguag**e**) ist ein in Kanada entwickeltes und vermarktetes Computer-Algebra-System für verschiedene Teilgebiete der Mathematik, wie zum Beispiel für Algebra, Analysis, Diskrete Mathematik und Numerik.

1. Exakte Arithmetik und Gleitpunktarithmetik

Maple führt alle vom Taschenrechner her gewohnten Berechnungen mit Zahlen aus. <**ENTER**> startet die Ausführung des eingegebenen Befehls oder der Befehlsfolge.
Maple-Befehle können durch **;** oder **:** abgeschlossen oder getrennt werden (bei **:** wird das Ergebnis bei Ausführung des entsprechenden Maple-Befehls jedoch nicht angezeigt).
Mit dem Symbol **#** leitet man einen Kommentar ein.
Exakte Arithmetik:

> $\frac{1}{7}+\frac{3}{4}$

> $\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{4}\right)$

> $\mathrm{sqrt}(8)$ # *äquivalent zu* $\sqrt{8}$

> $root[3](8)$ # *äquivalent zu* $\sqrt[3]{8}$

Der Befehl **evalf** bewirkt die numerische Approximation der exakten Werte:

> $evalf\left(\frac{1}{7}+\frac{3}{4}\right);\ evalf\left(\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{4}\right)\right);\ evalf(\mathrm{sqrt}(8))$

Bei Eingabe einer Gleitpunktzahl erfolgt die Rechnung in Gleitpunktarithmetik:

> $1.2+\frac{3}{17};\ \mathrm{sqrt}(8.0)$

Die Standardgenauigkeit bei Berechnungen beträgt 10 Ziffern. Will man zum Beispiel mit 50 Ziffern rechnen, so kann man dass durch Änderung der Standardgenauigkeit mit folgendem Befehl erreichen:

> $Digits := 50$

> $evalf(\mathrm{sqrt}(2))$

Die Wiederherstellung der Standardgenauigkeit erfolgt mit dem Befehl

> $Digits := 10$

Die gewünschte Stellenzahl in einer Berechnung kann auch wie folgt erreicht werden:

> $evalf[15](\mathrm{sqrt}(2))$

Mit ? aktiviert man die Online-Hilfe:

> ?*evalf*

Maple rechnet auch mit irrationalen Zahlen wie Kreiszahl $\boldsymbol{\pi}$ und Eulerscher Zahl **e** und approximiert diese bei vorgegebener Genauigkeit durch Gleitpunktzahlen. Mit dem Symbol **%**

kann auf das jeweils vorherige Ergebnis zugegriffen werden.

> Pi; $evalf(\%)$

> $\exp(1)$; $evalf(\%)$

Man beachte, dass **pi**, **PI** und **e** Bezeichner von Buchstaben sind und folglich keine numerische Berechnung erlauben:

> $evalf(\mathrm{pi})$; $evalf(\mathrm{PI})$; $evalf(e)$

Umwandlung von Gleitpunktzahlen in Brüche:

> $convert(0.514, fraction)$

> $convert(evalf(\mathrm{Pi}), fraction)$

2. Zuweisung von Objekten an Variablennamen

Mit dem Befehl **restart** starten wir Maple zunächst neu und löschen damit alle zuvor bereits getroffenen Zuweisungen, um fehlerhafte Rechnungen zu vermeiden.

> $restart$

Die Zuweisung eines Objektes (Zahl, algebraischer Ausdruck, Gleichung,...) an einen Variablennamen erfolgt durch den Operator :=

> $z := \frac{3}{5}$; $e := evalf(\exp(1))$

> $Polynom := x^2 + 4\cdot x - 5$

> $Gleichung := \exp(x) - x = 1$

Der folgende Befehl bewirkt die Rücknahme der zuvor zum Beispiel an z erfolgten Objektzuweisung.

> $z :=$'z'

3. Gleichungen und Ungleichungen

> $restart$: $gl1 := x^2 - x + 1 = 0$

> $lhs(gl1)$; $rhs(gl1)$ *# linke Seite und rechte Seite der Gleichung gl1*

Auflösung der Gleichung gl1 nach **x** mit dem **solve**-Befehl:

> $L := solve(gl1, x)$ *# im angezeigten Ergebnis bezeichnet I die imaginäre Einheit*

> $z := L[1]$ *# erste Lösung der Gleichung gl1*

> $\mathrm{Re}(z)$; $\mathrm{Im}(z)$ *# Realteil und Imaginärteil von z*

Durchführung der Probe für die erste Lösung unter Anwendung der Befehle **subs** und **is**:

> $Probe := subs(x = L[1], gl1)$

> $is(lhs(Probe) = rhs(Probe))$

Auflösung der Gleichung **gl1** nach **x** mit den Befehlen **RootOf** und **allvalues**:

> $RootOf(gl1, x)$; $allvalues(\%)$

Es existieren **Grenzen der exakten Lösbarkeit**:

> $RootOf\left(x^5 + x^3 - 9, x\right)$

> $L := allvalues(\%)$

> $evalf(L)$ *# liefert die Lösungen näherungsweise*

Besitzt eine Gleichung im Intervall [a,b] eine reellwertige Lösung, dann ist ihre numerische Berechnung mit dem **fsolve**-Befehl möglich:

> $gl2 := \exp\left(x^2\right)\cdot\cos(x-1) - \mathrm{sqrt}(x-2) = 0$

> $fsolve(gl2, x, x = 2..3)$

Lösung einer Ungleichung:

> $ugl := \text{abs}(x-4) < 6$

> $solve(ugl, x)$

4. Funktionen

Folgendes Beispiel zeigt, dass die Verwendung der Objekt-Zuweisung zur Vereinbarung einer Funktion y=f(x) ungeeignet ist.

> $restart : x := 3; f := 3 \cdot x^2 - 5; x := 2; f$

Die Argumentwertänderung zieht keine Änderung des Wertes von f nach sich.
Die **Vereinbarung einer Funktion** f(x) erfolgt mit dem Operator ->.

> $restart : f := x \rightarrow \text{sqrt}(x+1)$

Verschiedene Aufrufe der Funktion:

> $f(x)$

> $'f(x)' = f(x)$

Berechnung der Funktion für gegebene Argumente:

> $x := 2; f(x)$

> $f(3)$

Tabellierung der Funktion f(x) mit dem seq-Befehl oder mit Schleife:

> $seq(print(x, f(x)), x = -2..2)$

> $seq(print(x, f(x)), x = [0, 3.5, 10])$

> **for** x **from** -2 **by** 0.5 **to** 2 **do** $print(x, f(x))$ **end do**

Vereinbarung einer **Funktion mit mehreren Argumenten**, zum Beispiel mit den zwei Argumenten x und y:

> $restart : f := (x, y) \rightarrow \cos(x+y)$

> $f(1, 1); f(1.0, 1)$

Man beachte, dass die Anzeige des Funktionswertes (in exakter oder Gleitpunktdarstellung) von der Argumentdarstellung abhängig ist.

5. Graphik mit Maple

> $restart$

Graphische Darstellung einer Funktion y=f(x) mit dem **plot**-Befehl:

> $f := x \rightarrow x^2 - 2 \cdot x$

> $plot(f(x), x = -1..3)$ *# oder: plot(f,-1..3)*

Wird der **plot**-Befehl ohne Restriktion für das Argument x ausgeführt, dann erzeugt Maple eine Darstellung für das **Standardintervall** [-10,10].

> $plot(f(x), x)$

Anklicken der Graphik erzeugt eine diese umgebende Box. Durch "Anfassen" der Box mit der Maus in einem markierten Punkt kann die Größe der Graphik verändert werden. Außerdem stehen nach Mausklick auf die rechte Taste spezielle Menüs zur Bearbeitung der Achsen sowie zur Veränderung der Darstellung von Strichen und Punkten zur Verfügung.

Graphische Darstellung einer Funktion z=f(x,y) mit dem **plot3d**-Befehl:

> $f := (x, y) \rightarrow \sin(x \cdot y)$

> $plot3d\left(f(x, y), x = -\text{Pi}..\text{Pi}, y = -\frac{\text{Pi}}{2}..\frac{\text{Pi}}{2}\right)$

Anklicken der Graphik und anschließendes "Anfassen" der Figur mit der Maus ermöglicht eine Drehung der Figur.

Graphische Darstellung einer durch F(x,y)=c **implizit gegebenen Kurve** mit dem **implicitplot-**

Befehl:

> $F := x^2 + 2\cdot y^2 = 4$

> $implicitplot(F, x = -3..3, y = -3..3)$

Der Befehl wurde nicht ausgeführt, denn er erfordert das Laden des Zusatzpaketes **plots**. Das Laden eines Zusatzpaketes erfolgt mit dem **with**-Befehl.

> $with(plots)$

> $implicitplot(F, x = -3..3, y = -3..3)$

Abbildung der gleichen Kurve bei normierten Achsen:

> $implicitplot(F, x = -3..3, y = -3..3, scaling = CONSTRAINED)$

Aufgaben

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie 2^{123}, $\pi - \frac{22}{7}$, e^{π}, $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)^2$ mit Standardgenauigkeit.

b) Berechnen Sie $\frac{\sin(10^{-k})}{10^{-k}}$ für k = 1, 2,..., 10 auf 20 Stellen genau.

c) Bestimmen Sie die größere der Zahlen 99^{100} und 100^{99}.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $x^3 - 2\cdot x^2 + 4\cdot x - 8 = 0$

b) sin(x)+cos(x)=1

Man beachte: Im Fall **b)** liefert der **solve**-Befehl nicht alle Lösungen.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle reellwertigen Lösungen der folgenden Gleichungen mit Standardgenauigkeit.

a) $x^8 - x - 1 = 0$

b) $x^4 - \sqrt{1 - x} = 0$

Aufgabe 4

Die Funktion f(x)=sin(2x)+2cos(2x) ist in Maple zu vereinbaren.

a) Bestimmen Sie die Funktionswerte für $x=\frac{\pi}{4}$ und $x = 1$ mit Standardgenauigkeit

b) Erzeugen Sie die graphische Darstellung von f(x) ohne Restriktion für x bzw. für das Intervall I=[-π,π]. Welche Periode hat f(x)?

c) Bestimmen Sie die Nullstellen im Intervall I=[-π,π] mit Standardgenauigkeit.

Aufgabe 5

Die Gleichung $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ ist in Maple unter dem Namen **gl** einzugeben.

a) Man löse **gl** nach y auf, gebe der Lösung den Namen **yl** und führe die Probe durch.

b) Die Lösungskurven von yl[1] und yl[2] sind mit dem Befehl **plot**([yl[1],yl[2]],x=...) in einer Graphik zu erzeugen.
c) Man veranschauliche die Lösung der Gleichung **gl** mit dem **implicitplot**-Befehl