Sommersemester 2015

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
PD Dr. Erhard Hexel
Mathematik mit Maple für IN

Übungsserie 2

Folgen, Reihen und Grenzwerte mit Maple

1. Endliche Folgen und Listen

Eine **endliche Folge** ist eine Aufzählung gleichartiger oder verschiedenartiger Objekte, die durch Komma getrennt werden:

> $r := 2, 4, 7$

> $s := 1, 2, x^2 - 1, x = 0, x \rightarrow solve(x - y = 1, y)$

> $s[1]; s[3]; s[5]$ *# Zugriff auf einzelne Folgeglieder von s*

> $s[5](x)$ *# s[5] ist also eine Funktion in x*

> $s[2..4]$ *# Zugriff auf eine Teilfolge*

Endliche Folgen mit gleichartigen Objekten lassen sich oft auf einfache Weise mit dem **seq**-Befehl erzeugen:

> $f := x \rightarrow 10 - x^2$

> $a := seq(f(k), k = -3..4)$

Kleinstes und größtes Element der Folge a:

> $\min(a); \max(a)$

Schließt man eine Folge in eckige Klammern ein, so erhält man eine **Liste**:

> $lr := [r]$

> $ls := [s]; ls[3]$

> $l := [1, 3, 5, x, \mathrm{sqrt}(x)]; l[3..5]$

Eine Liste, deren Elemente selbst Listen sind:

> $L := [lr, l]$

> $nops(l); nops(L)$ *# Länge der Listen l und L*

Verwendung der Listenschreibweise für Grafiken:

> $F := [green, red, blue]$

> $LL := [L[1][1], L[2][4], L[2][5]]$

> $plot(LL, x = 0..3, y = 0..3, color = F)$

2. Unendliche Folgen und Grenzwerte

> *restart*

Bildungsvorschrift einer unendlichen Folge (a_n) in Funktionenschreibweise:

> $a := n \rightarrow \frac{n^2}{3 \cdot n^2 - 5 \cdot n}$

Graphische Darstellung der ersten 20 Folgeglieder von (a_n):

> $b := seq([n, a(n)], n = 1..20)$

> $plot([b], style = point, symbol = circle)$

Berechnung des Grenzwertes der Folge (a_n) mit dem **limit**-Befehl (man beachte die unterschiedliche Bedeutung der Befehle **limit** und **Limit**):

> $limit(a(n), n = infinity)$

> $Limit(a(n), n = infinity)$

> $Limit(a(n), n = infinity) = limit(a(n), n = infinity)$

Eine Prozedur zur Grenzwertberechnung:

> $restart$

> $Grenzwert := \mathbf{proc}(a, k)\ Limit(a, k = infinity) = limit(a, k = infinity);\ \mathbf{end\ proc}$

Aufruf der Prozedur **Grenzwert** zur Berechnung der Grenzwerte von Zahlenfolgen:

> $Grenzwert\left(2^{\frac{1}{n}}, n\right)$

> $c := n \rightarrow \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n};$

> $Grenzwert(c(n), n)$

Die **Eulersche Zahl e** als Grenzwert der Folgen (a_k) und (b_k):

> $a := k \rightarrow \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k; b := k \rightarrow \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$

> $with(plots):$

> $B1 := plot([seq([n, a(n)], n = 1..15)], color = red):$

> $B2 := plot([seq([n, b(n)], n = 1..15)], color = blue):$

> $display([B1, B2], style = point, symbol = circle)$

> $Grenzwert(a(n), n); Grenzwert(b(n), n)$

> $f := n \rightarrow \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$

> $Grenzwert(f(n), n)$

3. Rekursiv gegebene Folgen

Am Beispiel der durch

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}$$

mit $a_0 = 2$ rekursiv gegebenen Folge wird gezeigt, dass die Folgeglieder mit Maple durch eine **rekursive Prozedur** erzeugt werden können:

> $restart : Digits := 20$

> $a := \mathbf{proc}(n)\ \mathbf{if}\ n = 0\ \mathbf{then\ return}(2)\ \mathbf{else\ return}\left(evalf\left(\frac{a(n-1)}{2} + \frac{1}{a(n-1)}\right)\right)\ \mathbf{end\ if};\ \mathbf{end\ proc}$

Berechnung einzelner Folgeglieder mit Hilfe der Prozedur a:

> $seq(a(n), n = 0..4)$

> $\mathrm{sqrt}(2) = evalf(\mathrm{sqrt}(2))$

> $'a(5)' = a(5)$

Die Prozedur a berechnet $\sqrt{2}$ näherungsweise.

Ist die Rekursionsvorschrift einer rekursiv gegebenen Folge linear, dann liefert der **rsolve**-Befehl die explizite Bildungsvorschrift der Folge:

> *restart*

> $rsolve(\{x(n) = 1 + 2 \cdot x(n-1), x(1) = 1\}, \{x\})$

Folgen mit nichtlinearer Rekursionsvorschrift lassen sich mit dem rsolve-Befehl gewöhnlich nicht auflösen:

> $rsolve(\{y(n) - y(n-1)^2 + 1 = 0, y(1) = 2\}, \{y\})$

4. Reihen mit konstanten Gliedern

Bestimmung der Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

der ersten n Glieder einer Folge (a_k):

> *restart*

> $a := k \rightarrow q^k : 'a(k)' = a(k)$

> $s := n \rightarrow sum(a(k), k = 1..n)$

> $'s(n)' = simplify(s(n))$

> $Sum(a(k), k = 1..n) = simplify(sum(a(k), k = 1..n))$

Die folgende Summe konvergiert für wachsendes n sehr schnell gegen die Eulersche Konstante **e** (wird deshalb auch **schnelle e-Folge** genannt):

> *with* (*plots*) :

> $s := n \rightarrow sum\left(\frac{1}{k!}, k = 0..n\right)$

> $plot\left(\left[\left[seq([n, s(n)], n = 1..15)\right], \left[seq\left(\left[n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right], n = 1..15\right)\right]\right], style = point, symbol = circle\right)$

Die **unendliche Reihe** als Folge von Partialsummen:

> *restart*

> $Sum(a(k), k = 1..infinity) = Limit(Sum(a(k), k = 1..n), n = infinity)$

Berechnung des Wertes einer Reihe als Grenzwert der Folge der Partialsummen mit dem **sum**-Befehl:

> $Sum(q^k, k = 0..infinity) = sum(q^k, k = 0..infinity)$ *# Wert der geometrischen Reihe*

Eine **Prozedur** zur Berechnung des Wertes einer Reihe:

> *Summe* := **proc**(*a*, *k*, *k0*) *Sum*(*a*, *k* = *k0*..*infinity*) = *sum*(*a*, *k* = *k0*..*infinity*) **end proc**

Anwendung der Prozedur bei der Bestimmung des Wertes einiger positiver Reihen:

> $Summe\left(\frac{1}{k!}, k, 0\right)$ *# Schnelle e-Folge*

> $Summe\left(\frac{1}{k}, k, 1\right)$ *# Harmonische Reihe*

> $Summe\left(\frac{1}{k^2}, k, 1\right)$

Bestimmung des Wertes zweier alternierender Reihen:

> $Summe\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}, k, 1\right)$

> $Summe\left(\frac{(-1)^{k}}{k^2}, k, 1\right)$

Auch mit Maple kann man nicht für jede Reihe den Wert bestimmen:

> $Summe\left(\frac{k!}{k^k}, k, 1\right)$

Dann muss man sich mit Aussagen über das Konvergenzverhalten begnügen, etwa durch **Anwendung des Quotienten**- oder **Wurzelkriteriums** (hier im Beispiel: Quotientenkriterium):

> $a := k \to \frac{k!}{k^k}$

> $q := simplify\left(\frac{a(k+1)}{a(k)}\right)$

> $Limit(q, k = infinity) = limit(q, k = infinity)$

Welches Konvergenzverhalten hat die betrachtete Reihe folglich?
Bei der folgenden Reihe führt weder die Prozedur noch das Quotientenkriterium zu einer Aussage. Hier kann man das Vergleichskriterium anwenden:

> $b := k \to \frac{1}{k \cdot \mathrm{sqrt}(k+1)}$

> $Summe(b(k), k, 1)$

> $q := k \to \frac{b(k+1)}{b(k)} : 'q(k)' = q(k)$

> $Limit(q(k), k = infinity) = limit(q(k), k = infinity)$

Anwendung des Vergleichskriteriums:

> $c := k \to \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$

> $solve(b(k) < c(k), k)$

Damit gilt

> $Sum(b(k), k = 1 ..infinity) \leq Sum(c(k), k = 1 ..infinity)$

und weiter

> $Sum(b(k), k = 1 ..infinity) \leq evalf(sum(c(k), k = 1 ..infinity))$

Aufgaben

Aufgabe 1

Mit Hilfe der Listenschreibweise stelle man die Funktionen

f(x)= $\frac{x}{2}$+1, g(x)=2$\cdot x^2$, h(x)=e^{-x} , k(x)=sin(x)

im Intervall [-π , π] graphisch dar.

Aufgabe 2

Man bestimme den Grenzwert der Folgen

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$b_n = n \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{5 - \frac{2}{n}} \right)$$

$$c_n = \left(\frac{3 \cdot n - 4}{3 \cdot n} \right)^{n+1}$$

Aufgabe 3

Die **Fibonacci-Folge** ist bekanntlich gegeben durch die Vorschrift

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

mit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$.

a) Man schreibe eine rekursive Prozedur **fib:=proc(n)** zur Berechnung des n-ten Gliedes der Fibonacci-Folge.
b) Unter Anwendung der Prozedur **fib** sind die ersten 20 Glieder der Fibonacci-Folge zu berechnen.
c) Mit Maple versuche man eine explizite Darstellung der Fibonacci-Folge zu gewinnen.

Aufgabe 4

Mit folgender Rekursionsvorschrift kann die Quadratwurzel einer reellen Zahl a>0 iterativ bestimmt werden:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

a) Man schreibe eine Prozedur **wurzel:=proc(a,x0,N)** zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{a}$, wobei x0 eine erste Näherung sei und N die Anzahl der auszuführenden Iterationen angibt.
b) Mit der Prozedur **wurzel** ist $\sqrt{10}$ ausgehend von der ersten Näherung x0=2 mit 10 Iterationen näherungsweise zu berechnen.

Aufgabe 5

Man bestimme - falls möglich - den Wert der folgenden Reihen.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k + 5}{6^k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \ln(k)}{3 \cdot k - 1}$

Aufgabe 6

Zur Anwendung von Quotienten- und Wurzelkriterium bei der Untersuchung einer Reihe $\Sigma\, a_k$ auf Konvergenz schreibe man Prozeduren **QK:=proc(a)** und **WK:=proc(a)**. Die Prozeduren sollen nach Aufruf das entsprechende Kriterium auswerten und als Ergebnis jeweils 'Reihe konvergent' oder 'Reihe divergent' oder 'Keine Aussage möglich' melden.
Man wende die Prozeduren an zur Untersuchung folgender Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^k$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(3 \cdot k)!}$