Sommersemester 2015

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
PD Dr. Erhard Hexel
Mathematik mit Maple für IN

Übungsserie 3

Vektoren, Matrizen und lineare Räume mit Maple

Die Anwendung von Maple zur Lösung von Aufgaben der Linearen Algebra erfordert das Laden eines der Zusatzpakete **LinearAlgebra** oder **linalg** (veraltetes Paket). Mit dem Laden beider Pakete kann man bereits an der Schreibweise der bereitgestellten Befehle deutliche Unterschiede erkennen:

```
> with(LinearAlgebra)
> with(linalg)
```

Wir wollen uns hier (aus Zeitgründen) auf den Gebrauch des Zusatzpaketes **LinearAlgebra** beschränken.

Man beachte: nach jedem **restart** ist für die Ausführung weiterer Berechnungen zur Linearen Algebra das erneute Laden des Zusatzpaketes erforderlich.

1. Vektoren

```
> restart
> with(LinearAlgebra) :
```

Vereinbarung von Vektoren (erfolgt mit dem **Vector**-Befehl):

```
> Vector(3), Vector(2, 5), Vector[column](4, 1)    # konstante Spaltenvektoren
> Vector[row](3), Vector[row](4, 1)    # konstante Zeilenvektoren
> e3 := UnitVector(3, 4)    # Einheitsvektor der Standardbasis
> v := Vector([1, 2, 3, 4])    # Vereinbarung durch eine Liste
> w := Vector(4, k→2·k − 1)
      # Erzeugung der k-ten Komponente als Funktion von k
> wr := convert(w, Vector[row])    # Konvertieren in einen Zeilenvektor
> v(3), w(4)    # Aufruf einzelner Komponenten
> Dimension(v)    # Anzahl der Komponenten von v
```

Operationen mit Vektoren:

1) Summe und Differenz

```
> v + w; v − w    # optional: VectorAdd(v,w)  oder Add(v,w)
> v + wr    # Spalten- und Zeilenvektor lassen sich nicht addieren
```

2) Multiplikation mit einem Skalar

```
> 2·v    # Multiplikation mit einem Skalar
> v − 3·e3
```

3) Salarprodukt von Vektoren

```
> DotProduct(v, w)    # optional: v.w
```

4) Euklidische Norm, normierter Vektor

```
> Norm(v, Euclidean)    # optional: Norm(v,2)
> Normalize(v, Euclidean)    # optional: Normalize(v,2)
```

5) Winkel zwischen Vektoren

```
> α := VectorAngle(v, w)
```

> $convert(\alpha, degrees)$

> $evalf(\%)$

6) Kreuzprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^3$

> $a := Vector([1, 2, -1]); b := Vector([3, -3, 3])$

> $axb := CrossProduct(a, b)$ # optional $a \times b$

2. Matrizen

> $restart$

> $with(LinearAlgebra):$

Vereinbarung von Matrizen (erfolgt mit dem **Matrix**-Befehl):

> $Matrix(2, 3), Matrix(3, 2, 1)$ # konstante Matrizen

> $IdentityMatrix(3, 3)$ # Einheitsmatrix

> $A := Matrix(2, 3, [1, 2, 3, 4, 5, 6])$ # Vereinbarung durch eine Liste

> $B := Matrix([[1, 1], [0, 1]])$ # Eingabe der Zeilen als Listen

> $A(1, 3); B(2, 1)$ # Aufruf einzelner Matrixelemente

> $Row(A, 1); Column(A, 2)$ # Zeilen- und Spaltenvektor

> $Dimension(A)$ # Format der Matrix

> $RowDimension(A); ColumnDimension(A)$ # Zeilen- und Spaltenanzahl

> $l := [4, -3]; \; v := Vector(l)$

> $C := DiagonalMatrix(l, 2, 3); DiagonalMatrix(v)$ # Diagonalmatrizen

Operationen mit Matrizen:

1) Summe und Differenz

> $A + C; C - A$

2) Multiplikation mit einem Skalar

> $3 \cdot A, 5 \cdot A - C$

3) Multiplikation von Matrizen und Vektoren, Matrixpotenz

> $Multiply(B, C)$ # optional: $B \cdot C$

> $Multiply(B, v)$ # Matrix $\cdot$ Spaltenvektor

> $vr := convert(v, Vector[row])$

> $Multiply(vr, B)$ # Zeilenvektor $\cdot$ Matrix

> $Multiply(vr, v); Multiply(v, vr)$ # Vektor $\cdot$ Vektor

> $MatrixPower(B, 5)$ # optional: B^5

4) Transponierte einer Matrix und Inverse einer quadratischen Matrix

> $Transpose(A); Transpose(B)$

> $MatrixInverse(B)$ # optional: $B^{-1}, \frac{1}{B}$

3. Lineare Gleichungssysteme

> $restart$

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) kann mit dem **solve**-Befehl gelöst werden:

> $gl1 := 3 \cdot x - 5 \cdot y + z = 0; gl2 := x - z = 0$

> $solve(\{gl1, gl2\}, \{x, y, z\})$

Der **LinearSolve**-Befehl im Paket **LinearAlgebra** erlaubt die Lösung eines in Matrizenschreibweise gegebenen LGS A·x=b mit gegebener Matrix A und gegebenem Vektor b, sowie die Lösung einer Matrizengleichung A·X=B mit gegebenen Matrizen A,B:

```
> with(LinearAlgebra) :
> f := (i, j) → i + j
> A := Matrix(2, 3, f )
      # Erzeugung der Matrixelemente als Funktion von Zeilen- und Spaltenindex
> b := Vector( [0, 1 ])
> LinearSolve(A, b, free ='s' )
> B := Matrix( [ [1, 1 ], [1, -1 ] ])
> LinearSolve(A, B, free ='t' )
```

4. Lineare Abhängigkeit, Basis und Dimension

```
> restart
> with(LinearAlgebra) :
> v1 := Vector( [0, 1, 2, -4 ])
> v2 := Vector( [1, -2, 0, 1 ])
> v3 := Vector( [1, 0, -1, -1 ])
> v4 := Vector( [2, -3, 2, -2 ])
```

Zur Überprüfung der gegebenen Vektoren des $\mathbb{R}^4$ auf lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit kann man diese zunächst als Matrix A mit den Spalten v1 bis v4 schreiben, um dann durch Bestimmung der Determinante oder des Ranges von A die Frage zu klären:

```
> A := Matrix( [v1, v2, v3, v4 ])
> Determinant(A)
> Rank(A)
```

Die Lineare Hülle von {v1,v2,v3,v4} entspricht dem Spaltenraum der Matrix A. Eine Basis erhält man durch folgende Befehle:

```
> B := Basis( {v1, v2, v3, v4} )
> ColumnSpace(A)
```

Die Orthogonalisierung oder sogar Orthonormalisierung der gefundenen Basis kann mit dem **GramSchmidt**-Befehl erfolgen:

```
> GramSchmidt(B)
> GramSchmidt(B, normalized)
```

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben seien die Vektoren a=(2,-1,-3), b=(-2,1,1) und c=(-2,1,-3). Berechnen Sie mit Hilfe von Maple

a) den Vektor 3a+5b-c und seine euklidische Norm

b) Skalarprodukt und Vektorprodukt von a und b

c) den von a und b eingeschlossenen Winkel ϕ ohne Anwendung bzw. mit Anwendung des **VectorAngle**-Befehls, und geben Sie ϕ im Gradmaß sowie im Bogenmaß an

d) das Spatprodukt der Vektoren a,b und c

Überprüfen Sie weiterhin, ob die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis ihrer linearen Hülle.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Matrizen

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

a) Berechnen Sie A+B, 3AB, $(AB)^T$ und B^{-1}A.

b) Bestimmen Sie den Rang und die Determinante von $(AB)^T$.

Aufgabe 3

Gegeben sei das linearen Gleichungssystem $A \cdot x=b$ durch

$$2\cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$-2\cdot \lambda\cdot x_1 + \lambda\cdot x_2 + 9\cdot x_3 = 6$$

$$2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + \lambda\cdot x_3 = 1$$

a) Vereinbaren Sie die Koeffizientenmatrix A als Funktion von λ und berechnen Sie mit Maple die rellen Werte von λ, für welche det(A)=0 ist.

b) Bestimmen Sie alle reellen Werte von λ, für die das LGS keine Lösung/genau eine Lösung/ unendlich viele Lösungen hat.

b) Berechnen Sie die Lösungsmenge des LGS für λ=1.

Aufgabe 4

Im linearen Raum $\mathbb{R}^4$ sei die Ebene Γ=u+[v,w] gegeben durch u^T=(1,1,1,1), v^T=(1,2,0,1),w^T=(1,3, 1,1). Berechnen Sie unter Anwendung von Maple

a) Dimension und Basis des orthogonalen Komplementes von U=[v,w]

b) den Fußpunkt rf des Lotes von r^T=(2,1,1,2) auf Γ

c) den Abstand d(r,Γ)

Aufgabe 5

In der x-y-Ebene seien die folgenden fünf Punkte P_i =(x_i ,y_i) gegeben:

P_1=(-5,3), P_2=(-2,-1), P_3=(1,-5), P_4=(2,2), P_5=(3,-1).

a) Bestimmen Sie eine Ausgleichsgerade $f(x)=a\cdot x+b$, für welche die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

minimal wird (Methode der kleinsten Quadrate).

b) Stellen Sie die Punkte und die berechnete Ausgleichsgerade unter Anwendung der Befehle **plot** und **display** in einem Bild zusammen graphisch dar.